

1 Lezione del 03-03-26

1.1 Introduzione

Il corso mira a dare un'introduzione ai **segnali**, analogici e digitali.

In particolare, gli argomenti trattati sono:

- Analisi di *Fourier* di segnali analogici;
- Sistemi lineari e filtri;
- Teorema di campionamento di *Nyquist-Shannon*;
- Teoria dei codici;
- Sistemi di comunicazione *base-band* e *pass-band*

Inoltre, ci saranno alcuni elementi di:

- Elementi di probabilità;
- Variabili aleatorie;
- Processi stocastici.

1.1.1 Note storiche

Per avere un po' di introduzione storica, possiamo dire che la disciplina che studia i segnali nasce nel 1948 con la *teoria dell'informazione* di *Claude Shannon* (e la successiva *teoria dei codici* di *Golay* e *Hamming*, del 1949).

Una delle più grandi applicazioni di questa tecnologia è *Internet*, derivato dall'*ARPANET* del 1990 (di cui vediamo oggi innumerevoli applicazioni, fra cui il *World Wide Web* del 1990).

Un'altro campo di vasta applicazione della teoria dei segnali è quello delle comunicazioni *wireless*, che nasce dalla teoria di *Maxwell* e da esperimenti come quelli di *Bell* e *Marconi* di inizio '900. Oggi la tecnologia delle reti mobili si è evoluta per generazioni (1G, 2G, ...). Notiamo come evoluzioni più importanti il 2G *GSM* e il 4G *LTE* (*Long Term Evolution*), che riesce ad avere vaste aree di copertura usando un approccio in *divisione di frequenza* (*FDMA*).

1.1.2 Teoria dell'informazione

La **teoria dell'informazione**, come abbiamo detto, viene formalizzata da Shannon nel 1948. Ciò che si voleva capire era la **capacità** di bit al secondo che si potevano trasferire per un canale di comunicazione digitale (basato su bit 1/0) ad una certa frequenza (in Hz). Nel dettaglio, si va a ricavare la seguente formula (teorema di *Shannon-Hartley*):

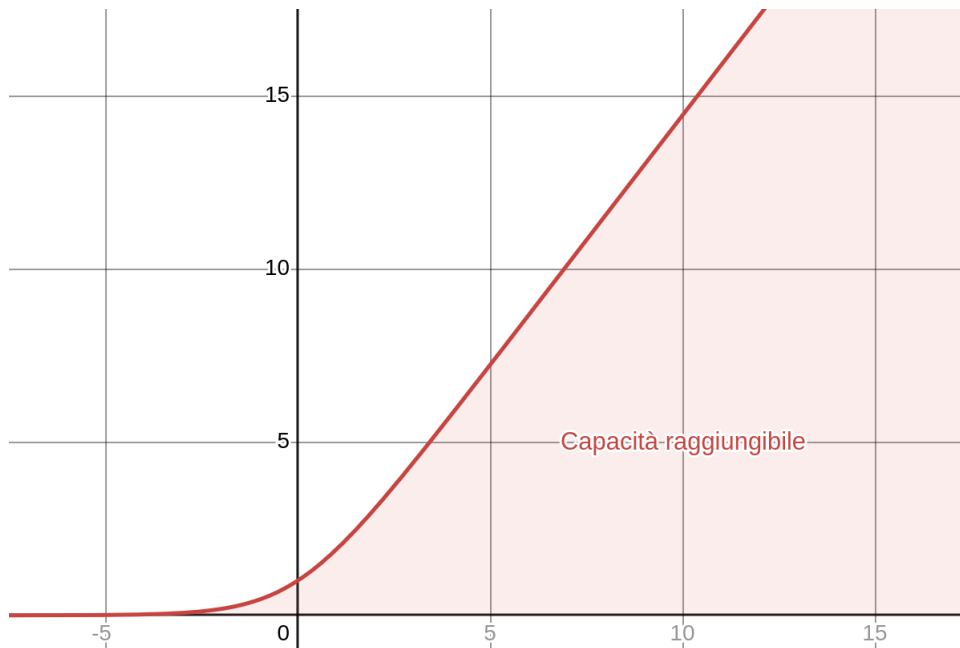
$$\text{Capacity} = \text{Bandwidth} \log_2 \left(1 + \frac{\text{Signal}}{\text{Noise}} \right) \text{ bit/s/Hz}$$

La **banda** è la frequenza a cui siamo capaci di trasmettere informazione sul mezzo, mentre chiamiamo **throughput** la frequenza di trasmissione di informazione effettiva

che otteniamo. Possiamo dire che la capacità non è altro che il throughput che otteniamo sulla data banda:

$$\text{Capacity} = \frac{\text{Throughput}}{\text{Bandwidth}}$$

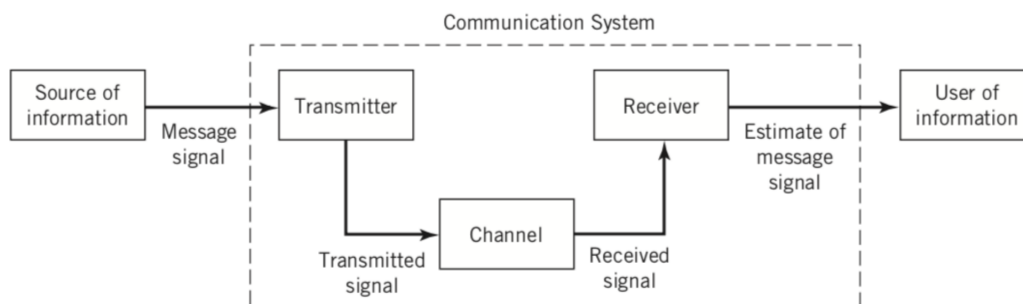
Notiamo subito come è importante il *rappporto segnale-rumore (SNR)* per valutare la cosiddetta capacità *raggiungibile* dai sistemi di comunicazione. Disegniamo la zona raggiungibile nel seguente grafico, dove il SNR si evolve in maniera esponenziale sull'asse delle ascisse:



Notiamo che la capacità definita da Shannon è sì la massima raggiungibile su un mezzo, ma la sua teoria non ci dà alcuna informazione riguardo a come effettivamente raggiungerla.

1.2 Elementi di un sistema di comunicazione

Interrogiamoci quindi su cos'è nel dettaglio un **sistema di comunicazione**.

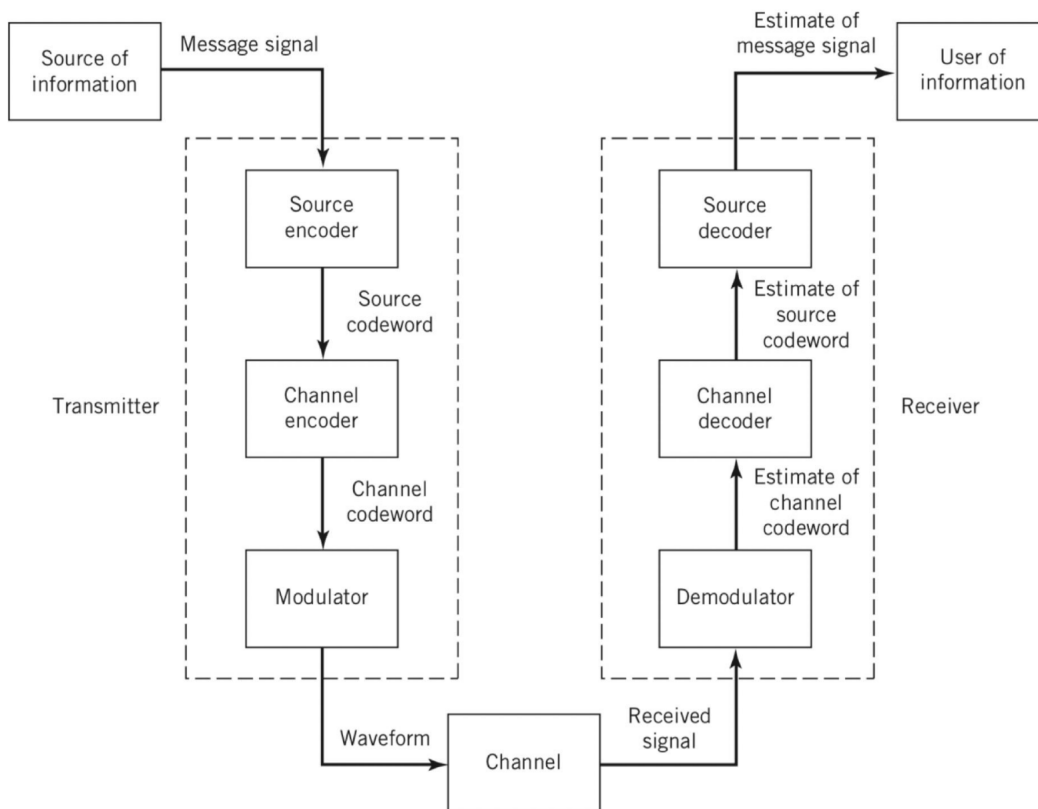


Di base, questo è un sistema composto da:

- Un **trasmettitore** che trasmette l'informazione proveniente da una *sorgente* sotto forma di *segnale*;
- Un **mezzo** attraverso il quale si propaga il segnale;

- Un **ricevitore** che riceve il segnale e lo riporta in informazione per consegnarla all'*utente* dell'informazione.

In verità, possiamo vedere il sistema più nel dettaglio:

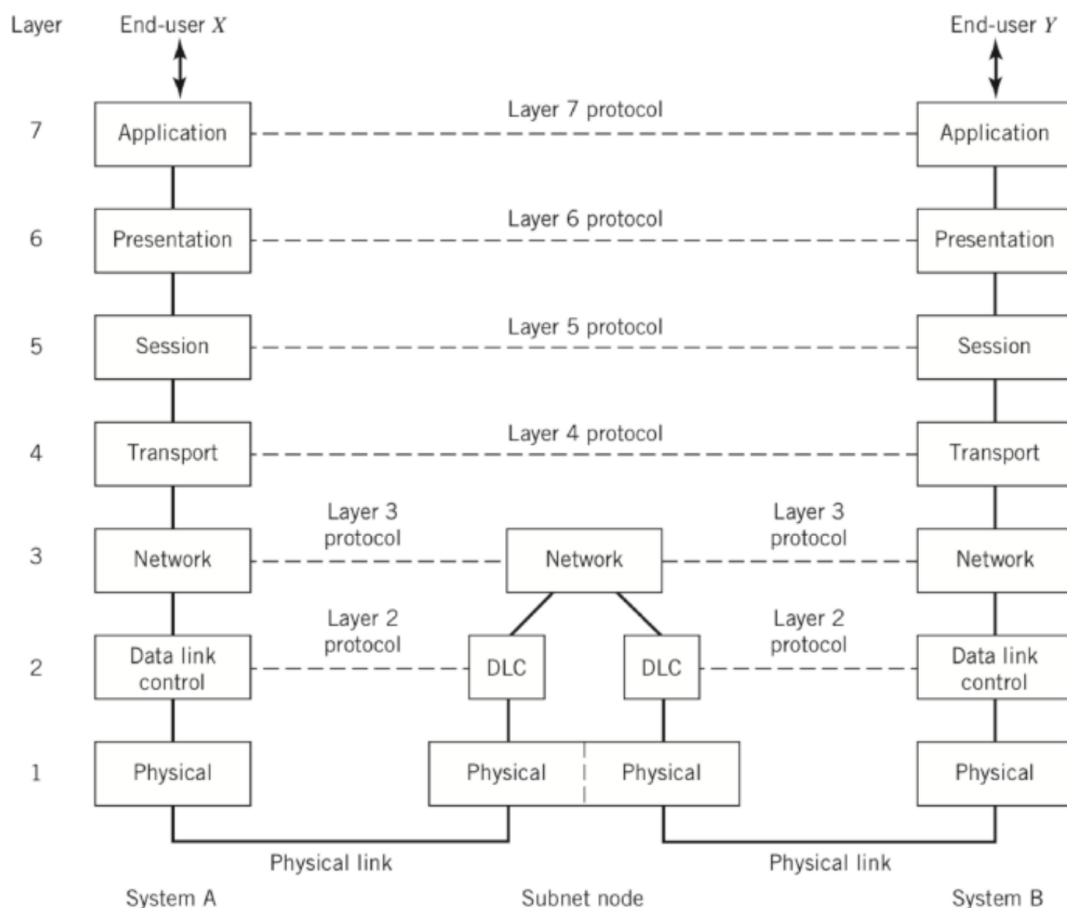


- Vediamo i componenti da cui è composto il **trasmettitore**:
 - **Source encoder**: sfrutta la *ridondanza* del messaggio con l'obiettivo di ridurne le dimensioni, senza comunque perdere troppa dell'informazione originale da non renderne possibile la decodifica in seguito.
L'esempio tipico che possiamo fare è quello degli algoritmi di *compressione* in uso nei calcolatori, ad esempio prima di caricare file di grandi dimensioni in rete;
 - **Channel encoder**: prende il messaggio ricevuto dal *source encoder* e lo prepara alla trasmissione sul canale. in questo caso notiamo che fa la cosa opposta: introduce della nuova ridondanza in modo da compensare gli errori che verranno commessi sul canale di propagazione.
L'introduzione di ridondanza nei messaggi per la correzione degli errori si basa su un'intuizione semplice: anche gli esseri umani potrebbero, quando non capiscono un messaggio, chiedere di *ripeterlo*: è appunto questa ripetizione apparentemente ridondante che permette di recuperare un errore e proseguire con la comunicazione.
Chiaramente, la ridondanza presenta un *tradeoff*: l'energia spesa a trasmettere informazione ridondante poteva essere usata per trasmettere nuova informazione, e va quindi tenuta ad un livello minimo.
Durante il corso studieremo i codici **a blocco**, che sono codici *lineari* studiabili attraverso gli strumenti dell'algebra lineare;

- **Modulator:** quello che esce dal modulatore non è più il segnale digitale preso dal channel encoder, ma una *forma d'onda* adatta a essere trasmessa sul mezzo.
- Vediamo quindi il dettaglio dei componenti del **ricevitore**, che saranno perlopiù paralleli a quelli del trasmettitore:
 - **Demodulator:** si occuperà di trasformare forme d'onda sul mezzo in bit, che sperabilmente saranno i bit emessi dal *channel encoder* del trasmettitore;
 - **Channel decoder:** si occuperà di sfruttare l'operazione ridondante inserita dal *channel encoder* per ricostruire il messaggio originale generato dal *source encoder*;
 - **Source decoder:** si occuperà di invertire il processo effettuato dal *source encoder*, in maniera da ricostruire il messaggio originale.

1.2.1 Modello OSI

Il modello **OSI** (*Open System Interconnect*) fornisce uno standard per l'organizzazione su *livelli* di un sistema di comunicazione. Possiamo dire che il livello che abbiamo visto finora è il cosiddetto livello *fisico*.



Assieme a questo, il modello OSI prevede 7 livelli:

- Livello **application**, quello a cui operano le applicazioni vere e proprie che interessano agli utenti;

- Livello **presentation**, un livello introdotto per trasformare i dati in ingresso in un formato comprensibile alle macchine degli utenti (gestendo particolarità come byte ordering, ecc...);
- Livello **session**, un livello introdotto per gestire le *sessioni* degli utenti;
- Livello **transport**, a cui si assicura la ridondanza ad alto livello dell'informazione e quindi la corretta trasmissione di dati anche attraverso diversi *hop* ("salti");
- Livello **network**, a cui si permette l'*interconnessione* di reti attraverso un formato comune;
- Livello **datalink**, costruito sul livello *physical*, pensato per prendersi a carico il trasferimento di dati da questo alle macchine utente, e introdurre in alcuni casi un suo livello di ridondanza;
- Livello **physical**, quello che abbiamo visto finora, riguardante il *mezzo fisico* vero e proprio;

Del modello OSI notiamo che è modulare e quindi semplice da sviluppare ed estendere. Abbiamo che la maggior parte delle cose che accadono nelle comunicazioni digitali avvengono ai livelli **physical**, **datalink** e **network**.

1.2.2 Struttura delle reti

Le reti sono formate da una serie di **nodi** interconnessi fra di loro. Il compito dei nodi è quello di instradare dati attraverso la rete, ed ogni nodo può avere una o più stazioni agganciate ad esso.

Esistono 2 tipi principali di rete:

- Rete a **commutazione di circuito**, dove le interconnessioni fra i nodi che collegano 2 stazioni in comunicazione vengono allocate completamente a quella comunicazione: altri nodi non possono usare le interconnessioni finché la comunicazione non è finita.

Un esempio tipico è quello del **POTS** (*Plain Old Telephone Service*), cioè la comune rete telefonica;

- Rete a **commutazione di pacchetto**, dove sulla rete non circolano segnali ma *pacchetti*, cioè elementi finiti di informazione che vengono ricavati dal segnale vero e proprio e possono quindi viaggiare in maniera *interlacciata* sul mezzo. Usato un approccio a comunicazione di pacchetto si può avere un uso condiviso da parte di più stazioni della stessa interconnessione.

L'esempio più celebre di rete a commutazione di pacchetto è la comune rete *Internet*.

1.2.3 Modalità di comunicazione

Su una rete si possono avere diverse **modalità** di comunicazione

- **Broadcasting**, dove un singolo nodo trasmette a più ricevitori;
- **Point-to-point**, dove la comunicazione avviene su un singolo link fra un trasmettitore e un ricevitore;

- **Point-to-multipoint**, dove la comunicazione avviene su un link fra un trasmettitore e più ricevitori.

1.2.4 Accesso multiplo

Diversi mezzi sono condivisi da più trasmettitori, cioè hanno bisogno di un protocollo **MAC** (*Medium Access Control*) per governare l'accesso al mezzo e fornire:

- Divisione del mezzo fra i trasmettitori;
- Sicurezza da *collisioni* fra le comunicazioni dei trasmettitori.

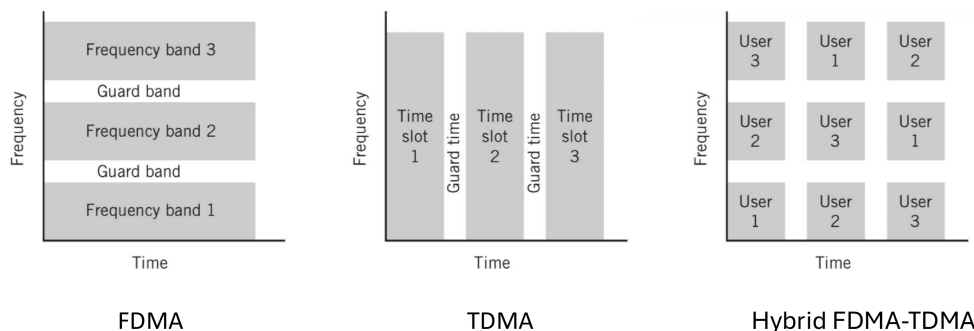
Esistono diversi approcci per effettuare l'accesso condiviso. In particolare notiamo:

- **TDMA** (*Time Division Multiple Access*): si divide l'uso del mezzo in più *slot* temporali, allocati ognuno ad un diverso trasmettitore.

Ad esempio, viene usata nei sistemi cellulari di seconda generazione (2G);

- **FDMA** (*Frequency Division Multiple Access*): si divide lo *spettro* del mezzo in più *bande* di frequenza, allocata ognuna ad un diverso trasmettitore.

Ad esempio, viene usata nei sistemi cellulari di quarta generazione (4G) assieme al TDMA.



In particolare, possiamo dire che il 4G *LTE* sfrutta un approccio *ibrido* FDMA-TDMA, dove si divide il mezzo sia in slot temporali che bande di frequenza, ottenendo quindi una sorta di *matrice* di slot disponibili per la trasmissione. Questi slot possono quindi essere allocati dalle *base station* ai dispositivi cellulari in maniera dinamica, per permettere la comunicazione sulla rete.

- **CDMA** (*Code Division Multiple Access*): si associa ad ogni dispositivo trasmettitore un *codice*. Questi codici verranno progettati in maniera da non interferire se più dispositivi comunicano contemporaneamente: sempre per questo motivo il partizionamento dei codici si comporta in maniera simile al partizionamento degli slot temporali o delle bande di frequenza.

Ad esempio, è stata introdotta in ambito militare e ha poi trovato applicazione nei sistemi cellulari di terza generazione (3G);

- **SDMA** (*Space Division Multiple Access*): in questo caso si usa la separazione spaziale degli utenti per effettuare la condivisione del mezzo. In questo caso si possono allocare più slot del mezzo prevedendo più antenne per dispositivo.

Ad esempio, viene applicata nei sistemi cellulari di quinta generazione (5G), nell'ambito delle *onde millimetriche*.

Notiamo che ognuna delle modalità di condivisione del mezzo fornisce una qualche "unità" minima (slot temporale, banda, codice) che può essere allocata ad un dispositivo. Per aumentare la capacità di trasmissione di un singolo dispositivo, nulla ci vieta di allocare più unità di trasmissione ad un singolo dispositivo.

1.2.5 Spettro delle radiofrequenze

Lo spettro delle radiofrequenze usate per la comunicazione *wireless* va dai 3 Hz ai 300 GHz (vediamo che oltre i 300 GHz l'*attenuazione* del segnale è troppo alta da dare risultati utili).

Abbiamo che questo spettro è usato in maniera condivisa da diversi sistemi, fra cui ad esempio la trasmissione televisiva, le reti mobili, le reti Wi-Fi IEEE 802.11x e Bluetooth, ecc... Sono quindi definiti degli enti che allocano e regolamentano lo spazio delle frequenze radio in modo da fornire uno slot abbastanza grande a tutte le applicazioni.

Vediamo una tabella riassuntiva delle bande di radiofrequenze usate e le applicazioni per cui vengono usate:

| Nome | Banda (Frequenze) | Uso |
|------|-------------------|----------------------------------------------|
| ELF | 3–30 Hz | Comunicazioni sottomarine |
| SLF | 30–300 Hz | Comunicazioni sottomarine |
| ULF | 300 Hz–3 kHz | Comunicazioni speciali, geofisica |
| VLF | 3–30 kHz | Navigazione, comunicazioni militari |
| LF | 30–300 kHz | Radiofari, navigazione |
| MF | 300 kHz–3 MHz | Radio AM |
| HF | 3–30 MHz | Onde corte, comunicazioni a lunga distanza |
| VHF | 30–300 MHz | FM, TV, aeronautica |
| UHF | 300 MHz–3 GHz | TV digitale, cellulari, Wi-Fi |
| SHF | 3–30 GHz | Radar, satelliti, microonde |
| EHF | 30–300 GHz | Comunicazioni ad onde millimetriche, ricerca |

Notiamo che la frequenza allocata è più o meno inversamente proporzionale all'area di copertura del sistema: per sistemi a corto raggio come il Wi-Fi IEEE 802.11x si può sfruttare la banda *ISM* a 2.4 GHz o della banda a 5 GHz, mentre per sistemi come la radio FM si usano le bande *VHF* dagli 87.5 MHz ai 108.0 MHz, ad esempio.

1.3 Richiami di analisi

Abbiamo bisogno di fare alcuni richiami di analisi in modo da avviarci verso l'analisi di *Fourier*.

1.3.1 Numeri complessi

Un numero **complesso** $\in \mathbb{C}$ è rappresentato da parte reale e immaginaria, come:

$$z = a + ib$$

dove i è l'unità immaginaria, con la proprietà:

$$i^2 = -1$$

Definiamo i classici operatori *parte reale* e *parte immaginaria*:

$$a = \operatorname{Re}\{z\}, \quad b = \operatorname{Im}\{z\}$$

Coniugato

Di un numero complesso si può calcolare il **coniugato** come:

$$z^* = a - ib$$

Valgono le seguenti proprietà, di facile dimostrazione:

$$a = \operatorname{Re}\{z\} = \frac{z + z^*}{2}, \quad b = \operatorname{Im}\{z\} = \frac{z - z^*}{2}$$

Forma polare

Assieme alla rappresentazione $z = a + ib$ appena vista, detta rappresentazione **cartesiana**, esiste la cosiddetta rappresentazione **polare** di un numero complesso:

$$z = ce^{i\theta}, \quad \begin{cases} c = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \operatorname{atan2}(b, a) \end{cases}, \quad \begin{cases} a = c \cos(\theta) \\ b = c \sin(\theta) \end{cases}$$

dove l'esponenziale $e^{i\theta}$ ruota un numero nello spazio complesso dell'angolo θ attorno all'origine (questo si ricava dalla scomposizione nella serie di Taylor della funzione esponenziale con argomento complesso, la cui dimostrazione si può trovare nei testi di analisi).

Operazioni sui complessi

Come sempre, ricordiamo che:

- Le **somme** complesse sono semplici in rappresentazione cartesiana:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) =$$

- I **prodotti** complessi sono semplici in rappresentazione polare:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i = c_1c_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Per quanto riguarda le *divisioni*, ricordiamo l'identità utile:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$$

da cui:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{c_1}{c_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

1.3.2 Seno e coseno

Definiamo le funzioni **seno** e **coseno** di un angolo θ rispettivamente come la posizione alle ascisse e alle ordinate di un punto con angolo θ in coordinate polari sulla circonferenza unitaria. Ricordiamo la celebre identità:

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

data dal teorema di *Pitagora*.

Formule di Eulero

Esiste una corrispondenza fra seno, coseno e numeri complessi rappresentata dalle identità:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

dette formule di *Eulero*, che stanno alla base della conversione fra forme cartesiane e polari dei numeri complessi viste prima in 1.3.2 (sempre prima avevamo accennato alla derivazione formale di queste formule).

2 Lezione del 05-03-26

2.1 Introduzione ai processi aleatori

Veniamo alla parte del corso dove trattiamo di:

- Elementi di probabilità;
- Variabili aleatorie;
- Processi stocastici.

Questa parte di teoria ci sarà utile nel caso di processi che si evolvono nel tempo in maniera *non deterministica*, o meglio **aleatoria**. Dal punto di vista matematico, avremo bisogno di partire dalle basi della teoria della **probabilità**.

Un modello si definisce *deterministico* se non vi è alcuna incertezza riguardo il suo comportamento ad ogni istante di tempo. Ad esempio, i sistemi lineari tempo-invariante (LTI, si rimanda agli appunti di automatica) sono sistemi deterministici, poiché i valori delle loro uscite possono essere completamente determinati a priori noti i valori dei loro ingressi.

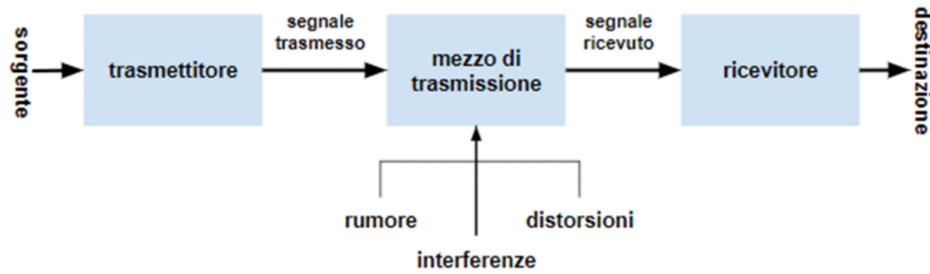
In molte situazioni reali (fra cui quelle che studieremo nel campo delle comunicazioni digitali) i modelli deterministici sono inappropriati e necessitiamo di un modello che tenga conto di molti valori sconosciuti. In questo caso dobbiamo trovare uno strumento matematico per modellare l'*incertezza*.

2.1.1 Modelli probabilistici

I **modelli probabilistici** sono necessari per progettare sistemi che:

- Rispondono a forte incertezza;
- Sono computazionalmente efficienti;
- E sono economicamente convenienti.

Prendiamo l'esempio di un sistema di comunicazione digitale su un canale *wireless*:



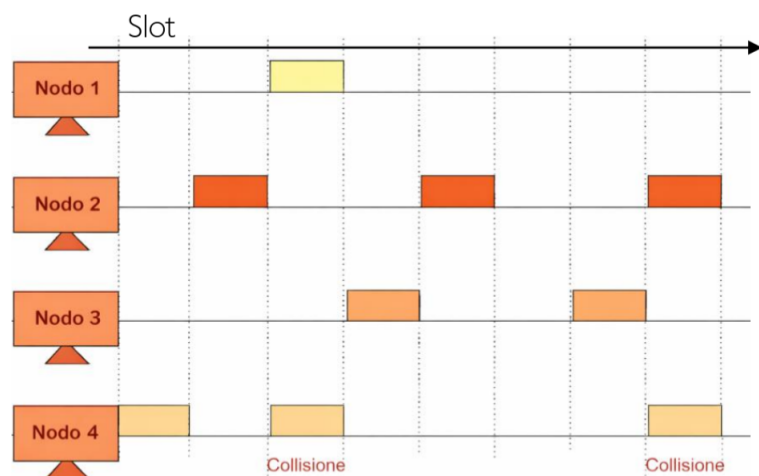
Come vediamo, abbiamo diversi elementi di natura aleatoria, fra cui:

- Il **rumore** di fondo del mezzo;
- Le **interferenze** da parte di altri trasmettitori;
- Le **distorsioni** date dalla natura del mezzo (ad esempio il fading del canale).

Il segnale ricostruito al ricevitore è quindi tipicamente una replica attenuata del segnale trasmesso più un contenuto di disturbo, ed è quindi modellabile come un *processo aleatorio*.

Un'altro campo in cui la modellazione aleatoria è particolarmente utile è quello di componenti che hanno una certa possibilità di "fallire". In questo caso, ci forniscono uno strumento matematicamente accurato per valutare la tolleranza dei sistemi costituiti da tali componenti.

Vediamo un ultimo esempio. Preso un protocollo di **MAC** (*Medium Access Control*) come ALOHA slotted, dove il tempo è diviso in slot, potremmo trovare una situazione simile:



dove ogni nodo (fra N nodi totali) trasmette ad ogni slot temporale con probabilità p . In questo caso i modelli probabilistici possono aiutarci a calcolare la probabilità di successo per la trasmissione di uno o di tutti i nodi in un dato slot (chiamiamola p_s), e di determinare il valore ottimo di p (chiamiamolo p^*) che massimizza p_s . Notiamo che calcoli di questo tipo sono stati già fatti negli appunti a <https://seggiani-luca.github.io/appunti-cn/master.pdf>, nei capitoli su ALOHA e ALOHA slotted.

Prendiamo quindi la probabilità che un singolo nodo trasmetta con successo in un dato slot come:

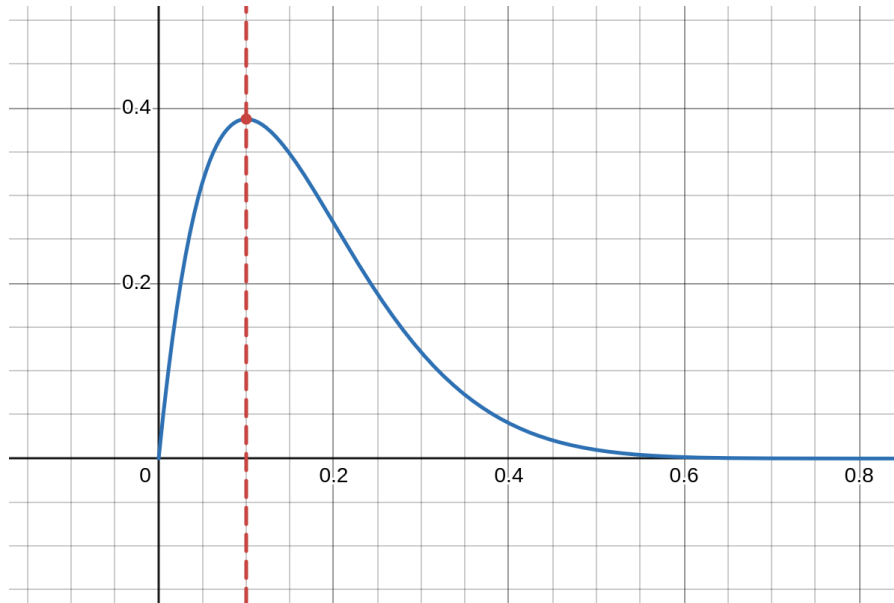
$$p(1-p)^{N-1} \implies p_s = Np(1-p)^{N-1}$$

da cui si ricava subito la probabilità che una trasmissione efficace avvenga fra tutti i nodi.

Sia p_s una funzione di p , e $N = 10$, cioè:

$$p_s(p, N) = Np(1 - p)^N - 1, \quad p \in [0, 1], \quad N = 10$$

Potremmo tracciare tale funzione su un grafico come:



dove si evidenziano il valore ottimo p^* di probabilità di trasmissione. Attraverso la derivazione nel documento allegato prima, o anche solo per intuizione, arriviamo alla conclusione che:

$$p^* = \frac{1}{N} = 0.1$$

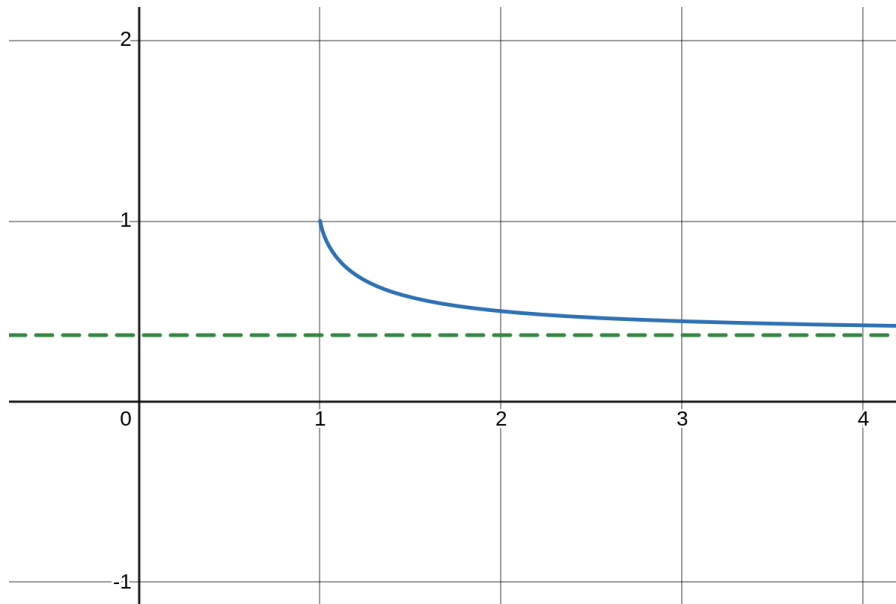
cioè la probabilità ottima è uno sul numero di utenti che trasmettono sulla rete. Sostituendo questo valore di p in p_s , possiamo tracciare la funzione al variare degli utenti N , cioè:

$$p_s(p, N) = Np(1 - p)^N - 1, \quad p = p^* = \frac{1}{N}, \quad N \in \mathbb{N} \implies p_s(N) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N$$

questa funzione è nota e di limite immediato immaginando infiniti dispositivi (il caso peggiore):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_s(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N = \frac{1}{e}$$

Possiamo tracciarla su un grafico per essere sicuri della derivazione:



da dove si vede chiaramente che il ramo di funzione tende al valore $\frac{1}{e} \approx 0.37$.

Abbiamo quindi trovato un problema legato al mondo delle comunicazioni numeriche, che teorie di tipo probabilistico riescono a descrivere, e attraverso le quali riusciamo ad avere buone stime dell'efficienza nel caso peggiore di operazione

Trattazione matematica

La teoria della probabilità ha come obiettivo:

- La descrizione matematica dei modelli probabilistici;
- Lo sviluppo di procedure di ragionamento che tengano traccia dell'incertezza.

2.1.2 Teoria degli insiemi

Cominciamo da richiami sulla teoria degli **insiemi**. Un insieme $A = \{x, y, \dots\}$ è una collezione di oggetti, i cui elementi vengono detti *elementi* $x \in A$. Gli elementi che *non* appartengono ad un insieme si notano come $z \notin A$. Indichiamo con \emptyset l'insieme vuoto. Notiamo che si possono indicare gli insiemi anche per proprietà comune:

$$[0, 1 = \{x : 0 \leq x < 1\}, \quad \dots$$

Sugli insiemi sono definite le classiche operazioni \cup, \cap, \setminus , (unione, intersezione, differenza), e le relazioni \subset, \subseteq (sottoinsieme stretto, sottoinsieme), ecc... Ricordiamo la proprietà:

$$\{A \cap B\} \subset \{A \cup B\}$$

Un insieme che ci risulterà particolarmente utile è l'insieme Ω , cioè lo spazio delle **possibilità**, detto anche spazio *campione*. Abbiamo che il numero possibile di sottoinsiemi di Ω , se Ω ha N elementi, è 2^N .

Nota uno spazio campione Ω , abbiamo a disposizione l'operazione di **complemento**, per cui possiamo dire $\bar{\emptyset} = \Omega, \bar{\Omega} = \emptyset$, e così via.

Diciamo quindi due insiemi *disgiunti* se vale:

$$A \cap B = \emptyset \implies A \text{ e } B \text{ sono disgiunti}$$

Un insieme di insiemi disgiunti la cui unione dà un insieme A viene detto partizione di A . In particolare:

$$\mathcal{P}(A) = \{a_1, a_2, \dots\} \text{ t.c. } \bigcup_i a_i = A$$

Ricordiamo quindi alcune leggi fondamentali sull'algebra degli insiemi:

Leggi di idempotenza

1a. $A \cup A = A$

1b. $A \cap A = A$

Leggi associative

2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Leggi commutative

3a. $A \cup B = B \cup A$

3b. $A \cap B = B \cap A$

Leggi distributive

4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leggi di identità

5a. $A \cup \emptyset = A$

5b. $A \cap U = A$

6a. $A \cup U = U$

6b. $A \cap \emptyset = \emptyset$

Leggi di complementarità

7a. $A \cup A^c = U$

7b. $A \cap A^c = \emptyset$

8a. $(A^c)^c = A$

8b. $U^c = \emptyset, \emptyset^c = U$

Leggi di De Morgan

9a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

9b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2.1.3 Teoria della probabilità

La teoria della **probabilità**, come abbiamo detto, ha lo scopo di descrivere fenomeni che non manifestano regolarità deterministica. Ciò che sfruttiamo è l'analisi *a posteriori* degli eventi misurati, con l'obiettivo di estrarre un qualche tipo di *regolarità globale*.

Chiamiamo quindi esperimento *casuale* o *aleatorio* il procedimento di osservazione dello stato finale del sistema (detto **risultato**). L'esperimento deve essere *ripetibile*, indeterminate volte, secondo le stesse modalità.

Da qui la prima definizione importante di questo argomento:

2.1: Spazio campione

Viene detto **spazio campione** Ω è l'insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento.

Un **evento** è un sottoinsieme dello spazio campione. Quindi è un insieme di risultati individuabile da una data caratteristica comune. Diciamo:

- Evento **certo**: lo spazio campione Ω . Questo si verifica ad ogni prova;

- Evento **impossibile**: l'insieme vuoto \emptyset . Questo non si verifica per nessuna prova;
- Evento **elementare** α , un solo elemento di Ω , cioè il risultato di un esperimento.

In soldoni, lanciare un dado è l'esperimento, ottenere 4 è il risultato, e ottenere una faccia pari o dispari è l'evento. Una prova è una singola esecuzione dell'esperimento in cui si ottiene l'evento α (cioè il risultato che α individua).

Usare la notazione insiemistica per definire gli eventi ci permette di applicare l'algebra degli insiemi agli eventi stessi.

Concetto di probabilità

Chiamiamo **probabilità** una funzione sul dominio degli eventi che restituisce la valutazione quantitativa della *possibilità* che quell'evento si verifichi. In simboli:

$$P(a) \rightarrow [0, 1], \quad \text{con } a \text{ evento}$$

Come vediamo, il codominio della probabilità è $[0, 1]$. Valori di $P(a)$ prossimi a 0 rappresentano scarse possibilità che quell'evento si verifichi, mentre valori di $P(a)$ prossimi a 1 rappresentano ottime probabilità che quell'evento si verifichi.

La definizione classica della probabilità è la seguente:

2.2: Definizione classica di probabilità

Dato uno spazio campione Ω di dimensione M , e sia m_a il numero di elementi parte dell'evento a in Ω . In tal caso la probabilità dell'evento a sarà:

$$P(a) = \frac{m_a}{M}$$

I vantaggi di questa definizione sono che:

- Definisce la probabilità in maniera *aprioristica*, senza ricorrere a prove sperimentali;

Gli svantaggi sono che:

- Si assume che tutti i risultati siano *equiprobabili*;
- Non si possono gestire i casi in cui i risultati non sono *equiprobabili* (ad esempio un mazzo truccato).

Per risolvere questi problemi si è affermata una seconda definizione di probabilità:

2.3: Definizione frequentistica di probabilità

Si fa la definizione preventiva di **frequenza relativa** attinente l'evento a , che su N prove è:

$$f_N(a) = \frac{n_a}{N}$$

La probabilità dell'evento A è quindi definita come limite:

$$P(a) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_a}{N}$$

I vantaggi di questa definizione sono che:

- Non si basa su ipotesi a priori ma sulla conoscenza a posteriori di un dato ottenuta attraverso prove;
- Definisce la probabilità anche se i possibili risultati non sono *equiprobabili*;

Gli svantaggi sono che:

- Da un punto di vista matematico, il limite non si può valutare analiticamente;
- Da un punto di vista pratico, non sempre si possono avere un numero arbitrariamente grande di osservazioni.

Dai limiti del modello **induttivo**, basato sull'interpretazione frequentista della probabilità, deriva l'opportunità di ricorrere al modello **deduttivo** dovuto a *Kolmogorov*. Questa è una definizione di tipo assiomatico. In questo non dà una definizione diretta della probabilità ma accetta qualunque approccio, purché questo rispetti le proprietà fondamentali, assunte come assiomi; da questi con l'ausilio della logica e della matematica si deducono le altre proprietà come teoremi.

2.4: Definizione assiomatica della probabilità

Basiamoci sulla definizione data inizialmente del concetto di probabilità, cioè quello di una funzione:

$$P(a) \rightarrow [0, 1], \quad \text{con } a \text{ evento}$$

Diamo quindi i 3 assiomi di *Kolmogorov*:

- **Normalizzazione:** la probabilità dell'intero spazio campione Ω (quindi dell'evento *certo*) dovrà essere uguale a 1:

$$P(\Omega) = 1$$

- **Non negatività:** la probabilità di un elemento dovrà essere un numero non negativo, per ogni evento a :

$$P(a) \geq 0, \forall a$$

- **Additività:** se a e b sono 2 eventi disgiunti, allora dovrà essere soddisfatta l'uguaglianza:

$$P(a \cup b) = P(a) + P(b)$$

Sarà questa la definizione di probabilità che useremo da qui in poi nel resto del corso.

Teoremi di probabilità

I 3 assiomi di Kolmogorov (definizione 2.4) possono essere usati per dimostrare alcuni teoremi:

2.1: Probabilità del complemento

Per ogni evento a vale:

$$P(\bar{a}) = 1 - P(a)$$

1.

Questo si dimostra a partire dall'assioma di *addittività*. In particolare:

$$P(a \cup \bar{a}) = P(a) + P(\bar{a}) = P(\Omega) = 1 \implies P(\bar{a}) = 1 - P(A)$$

ricordando che $a \cup \bar{a} = \Omega$ da cui la tesi. □

2.2: Probabilità dell'evento impossibile

La probabilità dell'evento impossibile è uguale a zero, cioè:

$$P(\emptyset) = 0$$

2.

Questo è banale dallo scorso teorema:

$$P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

□

2.3: Probabilità di eventi in sottospazi

Se l'evento b si trova nel sottospazio dell'evento a , cioè $b \subset a$, allora:

$$P(b) \leq P(a)$$

3.

Questo si ricava dal fatto che:

$$a = b \cup (a \cap \bar{b}) \implies P(a) = P(b \cup (a \cap \bar{b})) = P(b) + P(a \cap \bar{b})$$

visto che $P(a \cap \bar{b}) > 0$ dal secondo assioma, si ha la tesi. □

2.4: Probabilità della partizione

Sia $\mathcal{P}(\Omega)$ una partizione dello spazio campione in eventi a_1, a_2, \dots tali che:

$$\bigcup_i a_i = \Omega$$

In tal caso vale:

$$\sum_i P(a_i) = 1$$

4.

Questo si dimostra dal primo assioma:

$$1 = P(\Omega) = P\left(\sum_i P(a_i)\right) = P(a_1 + a_2 + \dots)$$

a questo punto possiamo applicare il terzo assioma $n - 1$ volte per dire:

$$P(a_1 \cup a_2 \cup \dots) = P(a_1) + P(a_2) + \dots = \sum_i P(a_i)$$

da cui la tesi. □

2.5: Probabilità di eventi non disgiunti

Se due eventi a e b non sono disgiunti, allora:

$$P(a \cup b) = P(a) + P(b) - P(a \cap b)$$

5.

Per questo si parte dal dividere $a \cup b$ in due coppie di eventi disgiunti:

$$a \cup b = a \cup (b \cap \bar{a}), \quad b = (a \cap b) \cup (b \cap \bar{a})$$

a questo punto si può applicare l'assioma 3, e quindi:

$$P(a \cup b) = P(a) + P(b \cap \bar{a}), \quad P(b) = P(a \cap b) + P(b \cap \bar{a})$$

Sottraendo le due espressioni membro a membro si ottiene:

$$P(a \cup b) - P(b) = P(a) - P(a \cap b) \implies P(a \cup b) = P(a) + P(b) - P(a \cap b)$$

e la tesi è dimostrata. □

Definizione di esperimento

Torniamo sulla definizione di *esperimento casuale*.

2.5: Esperimento casuale

Si ha che per Kolmogorov, un esperimento casuale è specificato dalla terna:

$$(\Omega, S, P(\cdot))$$

dove:

- Ω : è lo spazio *campione* che abbiamo definito in 2.1;
- S : è la classe degli *eventi*, cioè dei sottoinsiemi di Ω ;
- $P(\cdot)$: una funzione a valori reali detta *funzione di probabilità*, che obbedisce agli assiomi di Kolmogorov (definizione 2.4).

Possiamo dimostrare che le definizioni classiche e frequentiste della probabilità (2.2 e 2.3) soddisfano Kolmogorov. Partiamo dal dimostrare che la *frequenza relativa* relativa soddisfa gli assiomi, definendola come:

$$f_N(a) = \frac{n_a}{N}$$

da cui:

- $f_N(\Omega) = \frac{N}{N} = 1$, e quindi l'assioma 1 è dimostrato;
- $f_N(a) > 0, \forall a$ in quanto sia n_a che N sono numeri naturali, da cui l'assioma 2 è dimostrato;
- Questo è leggermente più complesso, dato $a \cap b = \emptyset$:

$$f_N(a \cup b) = \frac{n_a + n_b}{N} = f_N(a) + f_N(b)$$

Che sono tutti e tre gli assiomi. □

Le 2.1 e 2.2 si dimostrano quindi rispettose degli assiomi (e quindi valide per gli esperimenti casuali) a partire dal fatto che utilizzano entrambe la definizione di frequenza relativa.

Spazi campione finiti

Uno spazio campione finito è composto da un alfabeto finito di M elementi:

$$\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}$$

In questo caso S viene scelto come la totalità dei 2^M sottoinsiemi di Ω , e la proprietà degli elementi elementari $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ è scelta per soddisfare gli assiomi di Kolmogorov:

$$\begin{cases} P(\Omega) = \sum_i^M P(\alpha_i) = 1 \\ P(\alpha_i) \geq 0, \forall i \end{cases}$$

Dunque, per il generico evento $a = \{\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots\}$ si ha che la probabilità è:

$$P(a) = P\left(\bigcup_{i=1}^m a_{k_i}\right) = \sum_i^m P(a_{k_i})$$

In tal modo un sistema di probabilità finito è completamente specificato assegnando l'alfabeto per $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}$ e la probabilità $P(\alpha_i)$ degli eventi elementari.

Modello uniforme di probabilità

La definizione 2.2, che ci dava un modello *equiprobabile* e quindi **uniforme** di probabilità, corrisponde col modello a spazio campione finito dove la probabilità degli elementi α è dato da:

$$P(\alpha_i) = \frac{1}{M}, \forall i$$

In questo caso, la probabilità di un evento a è data dal numero di elementi che contiene:

$$P(a) = P\left(\bigcup_{k=1}^K a_{i_k}\right) = \sum_{k=1}^K P(a_{i_k}) = \frac{K}{M}$$

Adottando il modello uniforme, il calcolo della probabilità di un evento si riduce al conteggio del numero di risultati ad esso favorevoli. A tale proposito, possono tornare utili i concetti del calcolo combinatorio

3 Lezione del 06-03-26

3.1 Introduzione ai segnali

Iniziamo ad introdurre il concetto di segnale. Di base, un **segnale** è una qualunque grandezza fisica variabile a cui associamo una certa *informazione*. Quindi, esiste una divisione fra ciò che noi intendiamo comunicare (l'*informazione*), e la rappresentazione di ciò che possiamo comunicare su un mezzo di trasmissione (il *segnale*):

$$\text{informazione} \xrightarrow{\text{rappresentazione sul mezzo}} \text{segnale}$$

Esiste una divisione principale basata sul concetto di determinismo, introdotto alla scorsa lezione

- Un segnale **deterministico** è un segnale noto per ogni istante temporale (se si parla, come faremo, di segnali temporali). In questo, i segnali deterministici sono descrivibili o comunque approssimabili con grande precisione da funzioni analitiche (ad esempio, $\sin t$);
- Un segnale **aleatorio** è invece un segnale non noto *a priori*, rappresentabile solo in maniera statistica. In questo, permette di descrivere segnali modulati da grandezze sconosciute a priori come un certo *rumore* di fondo, *interferenze* di altri segnali, e *distorsioni* date dal mezzo.

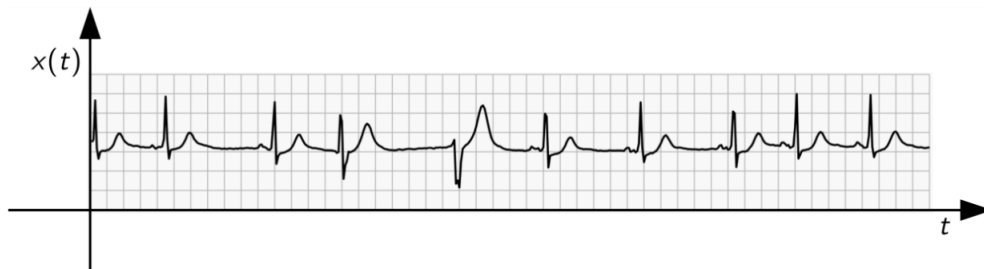
In verità, secondo questi termini, tutti i segnali che incontriamo nel mondo reale sono dotati di rumore (lo sono sicuramente quelli naturali, ma anche i segnali che catturiamo con apparecchiature elettroniche saranno suscettibili a rumore). Per questo motivo i segnali deterministici non riescono ad essere più che una (a volte ottima) approssimazione dei segnali reali.

3.1.1 Modellizzazione di un segnale

Dal punto di vista matematico, un segnale è una funzione di una o più variabili indipendenti. Queste possono essere variabili *temporali*, *spaziali*, o ancora combinazioni *spazio-temporali*.

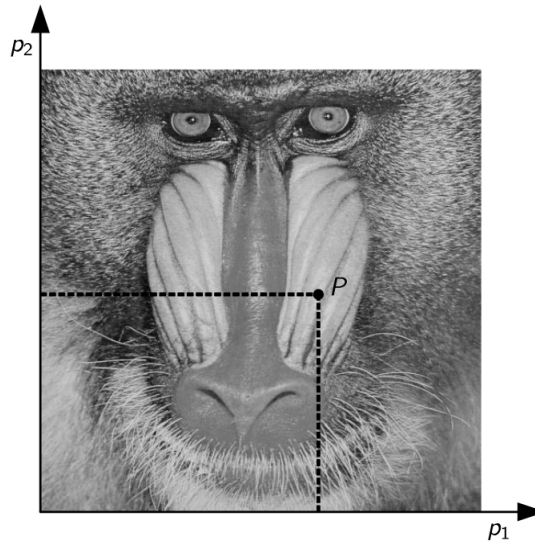
Facciamo alcuni esempi:

- Un **suono**, come una qualunque perturbazione periodica di un mezzo di trasmissione (ad esempio un mezzo elettrico), può essere rappresentato da una funzione del tempo t . Prendiamo l'esempio dell'elettrocardiogramma (che rappresenta comunque un segnale acustico):



$$\text{Suono}(t) = \text{Ampiezza}, \quad \text{Suono} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- Un'immagine in bianco e nero può essere rappresentata come una funzione governata dalle variabili temporali x, y :

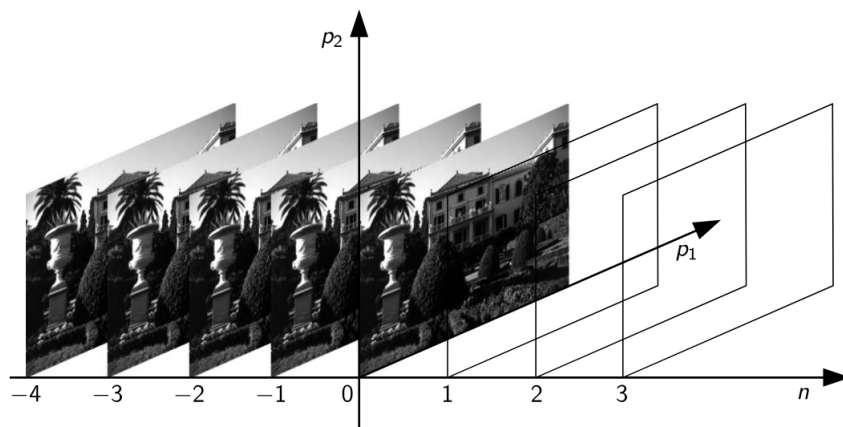


$$\text{Immagine}(x, y) = \text{Luminosità}, \quad \text{Immagine} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

nel caso di funzioni a colori, dovremmo mappare i nostri pixel a triple (r, g, b) (o comunque usare un qualche schema di rappresentazione del colore, cosa che solitamente richiede 3 dimensioni indipendenti), e quindi avere:

$$\text{Immagine}^C(x, y) = (r, g, b), \quad \text{Immagine}^c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Introducendo una dimensione temporale alla funzione (e restando per ora in bianco e nero), si può trasformare questo segnale $\text{Immagine}(x, y)$ in un segnale $\text{Video}(x, y, t)$:



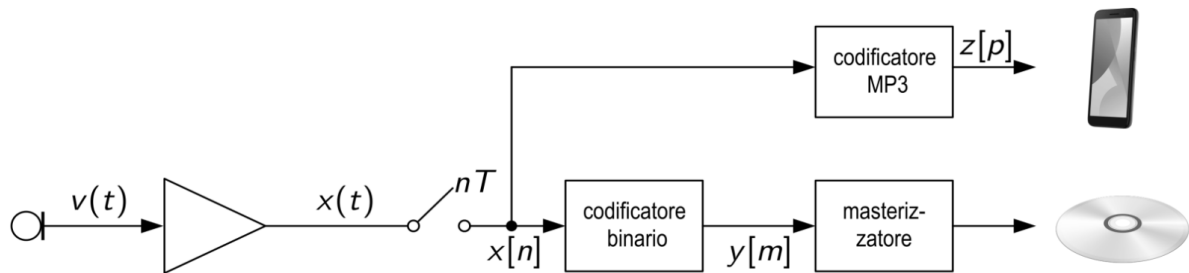
$$\text{Video}(x, y, t) = \text{Luminosità}, \quad \text{Video} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Un'altra distinzione può essere fatta fra segnali *analogici* e *digitali*:

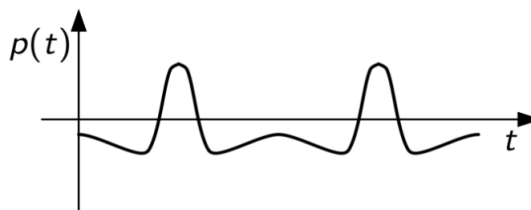
- I segnali **analogici** sono quelli che troviamo in natura (e che abbiamo descritto finora). In questo, possono assumere la forma di segnali *acustici*, segnali *elettrici*, ecc... Vengono descritti da funzioni reali di variabile reale, e quindi hanno bisogno di una precisione potenzialmente infinita per poter essere resi in maniera accurata;
- I segnali **digitali** sono quelli che *discretizziamo* campionando i segnali analogici periodicamente. Abbiamo che questo processo perde per forza informazione riguardo al segnale originale, ma è l'unico modo per gestire i segnali che vengono dal mondo esterno, all'interno dei sistemi di elaborazione digitali.

3.1.2 Campionamento di segnali

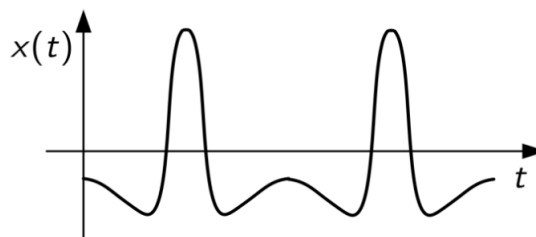
Descriviamo un caso reale di *campionamento* di un segnale analogico, diciamo un segnale audio trasformato in segnale elettrico attraverso un *trasduttore* (un *microfono*), per farci un'idea del tipo di procedura e delle limitazioni che incontriamo.



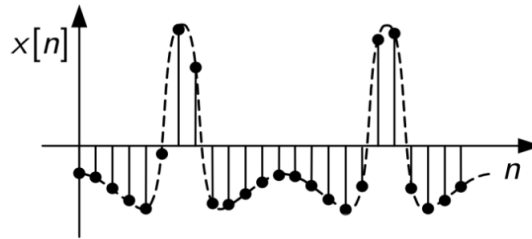
1. Quello che vogliamo fare è prendere, inizialmente, il segnale $v(t)$ direttamente dal **trasduttore** (microfono):



2. Per avere una buona resa del segnale, sarà opportuno far passare il segnale del trasduttore attraverso un **amplificatore** che ne aumenti l'ampiezza:



3. **Campioniamo** quindi il segnale ottenuto (che chiamiamo $x(t)$) ad intervalli regolari T , e cioè con un *periodo* di campionamento T o analogamente una *frequenza* di campionamento $f = \frac{1}{T}$:



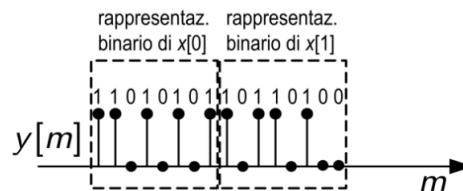
Questo significherà che "registreremo" il valore di $x(t)$, per ogni naturale n , al tempo nT , ottenendo la funzione:

$$x[n] = x(nT)$$

di argomento naturale;

4. Il segnale campionato potrà quindi entrare il dominio digitale ed essere codificato, masterizzato o compresso in vari modi (come si vede dalla figura).

In particolare, il primo passo da effettuare sarà quello di codificare ogni campione (che è comunque rimasto un numero $\in \mathbb{R}$) in una codifica binaria, quindi scegliere d bit (solitamente 8, 16 o 24) per rappresentare ogni campione e scrivere in una determinata porzione di memoria un vettore contenente le codifiche di tutti i campioni registrati. Chiamiamo il segnale così ottenuto $Y[m]$:



Notiamo quindi di avere una doppia perdita di informazione:

- Quella ottenuta campionando il segnale ad intervalli regolari T , che quindi si verifica nel dominio *temporale*;
- Quella ottenuta "campionando" ancora in qualche modo le ampiezze riportandole ad un dominio:

$$[-2^{(d-1)}, 2^{(d-1)} - 1]$$

scalato sui bound dell'ampiezza del segnale campionato (solitamente negli impianti agli 0 dB del *full scale* o poco più in alto). Questa perdita si verifica quindi nel dominio dell'*ampiezza*, e viene detta errore di **quantizzazione**.

Il processo di *quantizzazione* dei segnali prende anche il nome di conversione **ADC** (*Analog to Digital Conversion*). I dispositivi che operano la conversione ADC, come abbiamo detto, lavorano solitamente in un range che va dagli 8 ai 24 bit.

Inoltre, possono supportare 2 tipologie principali di quantizzazione:

- Quantizzazione *uniforme*: dove i valori codificati vanno linearmente con l'ampiezza;
- Quantizzazione *non-uniforme*: dove i valori codificati vanno in maniera non lineare con l'ampiezza. Convertitori di questo tipo sono più difficili da realizzare ma in alcune situazioni possono raggiungere fedeltà nella resa del segnale originale migliori rispetto alle controparti uniformi.

Come vedremo, esiste un'equazione per la frequenza di campionamento minima che ci permette di ricostruire un segnale a partire da una sua versione campionata:

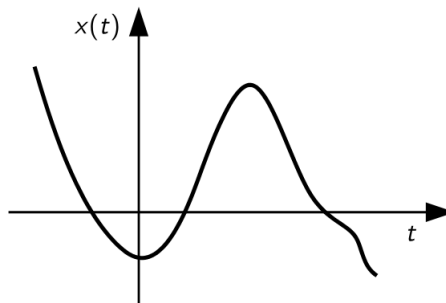
$$f = \frac{1}{T} \geq 2B$$

dove B è la larghezza di banda del segnale originale (assunto che questo segnale abbia dominio di banda finito). Chiamiamo questo risultato teorema di *campionamento di Nyquist-Shannon*. Unito alla ricostruzione del segnale originale con un operatore cosiddetto *seno cardinale*, questo ci assicura che il passaggio da mondo analogico e digitale può essere fatto senza perdita di informazione.

3.1.3 Tipologie di segnale

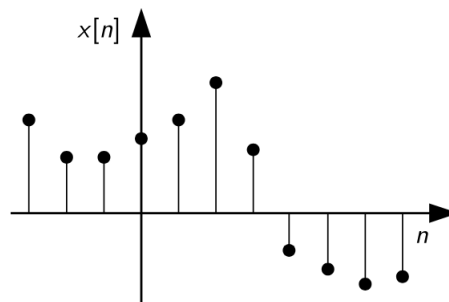
Notiamo che, nello scorso esempio, abbiamo visto diversi tipi di segnale. Possiamo individuare 2 caratteristiche ortogonali, date dalla **continuità** o meno nel dominio *temporale* e nel dominio di *ampiezza*:

- Chiamiamo **analogici** i segnali continui nel tempo e nelle ampiezze:



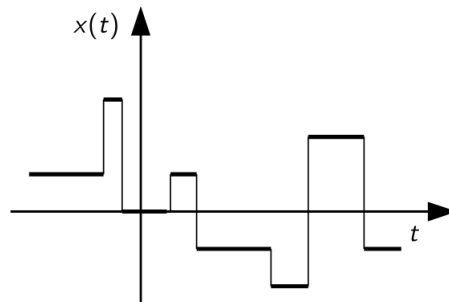
Questi corrispondono al segnale originale che volevamo campionare nello scorso esempio, come ai segnali elettrici campionati e poi amplificati ($v(t)$ e $x(t)$);

- Chiamiamo **sequenze** i segnali discontinui nel tempo e continui nelle ampiezze:



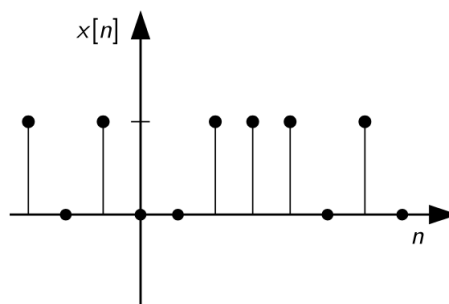
questi corrispondono al segnale campionato dal campionatore, cioè $x[n]$;

- Chiamiamo **quantizzati** i segnali continui nel tempo e discontinui nelle ampiezze:



non abbiamo ancora visto segnali di questo tipo, ma possiamo considerarli versioni continue nel tempo delle sequenze;

- Infine, chiamiamo **digitali** i segnali discontinui nel tempo e nelle ampiezze:



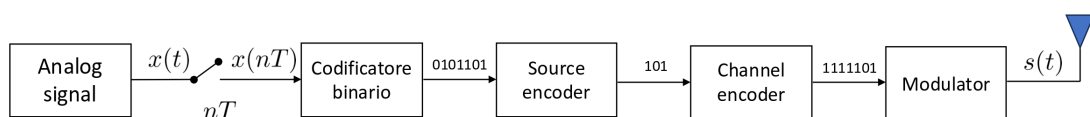
questi sono effettivamente i segnali come $y[n]$ che trattiamo nei sistemi di elaborazione digitale. Notiamo che, visto che ogni campione va rappresentato da una sequenza di d bit, la frequenza di informazione dei segnali digitali f_d e la frequenza di informazione dei corrispondenti segnali campionati f_c obbedisce la relazione:

$$f_d \geq f_c$$

dove l'uguaglianza si ha nel caso banale in cui si rappresenta il campione con un solo bit.

Sistemi di comunicazione a campionamento

Possiamo quindi confrontare le nozioni finora acquisite con quanto avevamo discusso nella prima lezione, sezione 1.2 . Avevamo infatti discusso la struttura di un *sistema di comunicazione*, e viste le parti che lo costituivano operando l'elaborazione dei segnali.



Adesso possiamo dare una descrizione reale di ciò che accade ai segnali nel corso della *pipeline* di un **trasmettitore** che attraversano:

1. Prima di tutto, il segnale analogico (che può essere acustico, elettrico, elettrico convertito da analogico, ecc...) deve essere **campionato** ad intervalli regolari T . Quando si effettua il campionamento, la frequenza dell'informazione (cioè la banda) diminuisce (e si perde informazione);
2. Il segnale dovrà quindi essere codificato (o meglio dovranno essere codificati i campioni) attraverso un **codificatore binario**. Come avevamo detto, ogni campione richiede più bit, per cui la larghezza di banda dovrà aumentare;
3. Segue il **source encoder**, già visto in 1.2, che avrà l'obiettivo di comprimere il segnale ottimizzandone la rappresentazione digitale, e quindi diminuire la larghezza di banda. Per far questo notiamo che sfruttava la *ridondanza* intrinseca del segnale, rimuovendola;
4. Segue il **channel encoder**, anche questo già visto in 1.2, che dovrà preparare il segnale alla trasmissione sul mezzo e quindi solitamente aumenterà la larghezza di banda introducendo *ridondanza* utile al rilevamento degli errori;
5. Infine il segnale preparato dal channel encoder potrà essere messo sul mezzo di trasmissione dal **modulatore**. Molto probabilmente, sul mezzo vero e proprio il segnale assumerà di nuovo una forma analogica (ad esempio un segnale elettrico su un cavo in rame).

Dall'altro capo del sistema ci sarà un apparato **ricevitore** che dovrà svolgere tutte queste operazioni al contrario, ricostruendo quindi il segnale analogico originale (o molto più probabilmente una sua rappresentazione più o meno accurata).

3.2 Segnali complessi

Iniziamo a parlare di segnali *complessi*, cioè rappresentati da due valori in evoluzione nel tempo o su un'altra grandezza $a(t)$ e $b(t)$. Rappresentiamo questo segnale come un numero complesso $\in \mathbb{C}$:

$$z(t) = a(t) + ib(t) = c(t)e^{i\theta(t)}$$

Essendo questo segnale una funzione complessa ad argomento reale, possiamo applicare le proprietà viste in 1.3, in particolare riguardo ai numeri complessi. Definiamo inoltre le operazioni di integrale e derivata di tale segnale:

- *Integrale:*

$$\int z(t) dt = \int a(t) dt + i \int b(t) dt$$

- *Derivata:*

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{da(t)}{dt} + i \frac{db(t)}{dt}$$

Potenza

Se si parla di valori complessi, è utile dare una qualche nozione di **potenza**. L'origine più intuitiva di un concetto di potenza è il dominio dei circuiti elettrici, dove la potenza dissipata su un componente passivo come un resistore è uguale a:

$$P(t) = RI^2(t)$$

Questa legge è applicabile in astratto, per cui dato un qualunque segnale $x(t)$ (qui era $I(t)$) vale:

3.1: Potenza istantanea

La **potenza istantanea** di un segnale $x(t)$ è proporzionale al suo quadrato:

$$P(t) = |x(t)|^2$$

Energia

Data una definizione di *potenza* espressa in funzione dell'energia:

$$P = \frac{E}{t}$$

cioè energia E su tempo t , è appunto semplice dare una definizione di **energia** dissipata su un certo periodo di tempo. Questa, dagli strumenti di analisi, potrà essere calcolata come l'integrale:

$$E_{x_T} = \int_{t_0}^{t_1} P(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} |x(t)|^2 dt$$

su un certo intervallo temporale $[t_0, t_1]$.

Molto più spesso, vorremo calcolare l'energia da $-\infty$ a $+\infty$ di un segnale, cioè quella su tutto $t \in \mathbb{R}$. Per fare ciò, prendiamo l'intervallo:

$$[t_0, t_1] = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$$

per una qualche dimensione di *finestra* T , cioè la finestra centrata sull'origine, da cui otteniamo la nuova espressione di E_{x_T} :

$$E_{x_T} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} P(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

a questo punto basterà prendere il limite per $T \rightarrow +\infty$ per ottenere:

3.2: Energia

L'**energia** espressa sul dominio \mathbb{R} da un segnale $x(t)$ è espressa come:

$$E_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} E_{x_T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

questa sarà la definizione di energia complessiva che useremo da qui in poi.

Segnale troncato

Vediamo un dettaglio, prendiamo il segnale:

$$x_T(t) = \{t_0 < t < t_1 : x(t), 0 \text{ altrimenti}\}$$

come la versione **troncata** sull'intervallo $[t_0, t_1]$ del segnale $x(t)$. Calcolare l'energia del segnale $x(t)$ sull'intervallo $[t_0, t_1]$ equivarrà a calcolare l'energia da $-\infty$ a $+\infty$ del segnale troncato. Vedremo subito come queste definizioni ci sono utili nella definizione di potenza media.

Potenza media

Una volta che abbiamo un'idea di *energia* dissipata o erogata nel tempo, possiamo definire la **potenza media** su un *intervallo* (altresì dissipata o erogata nel tempo) come:

$$P_{x_T} = \frac{E_{x_T}}{t_1 - t_0} \quad E_{x_T} = \int_{t_0}^{t_1} x^2(t) ds$$

Spostiamoci sull'intervallo:

$$[t_0, t_1] = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$$

che è ciò che avevamo fatto per ricavare l'energia complessiva su \mathbb{R} . Questo diventa quindi:

$$P_{x_T} = \frac{E_{x_T}}{T} \quad E_{x_T} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

di cui prendiamo il limite per $T \rightarrow +\infty$ per ottenere:

3.3: Potenza media

La **potenza media** espressa sul dominio \mathbb{R} da un segnale $x(t)$ è espressa come:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} P_{x_T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

Generalmente, da qui in poi useremo questa definizione per riferirci alla potenza dei segnali.

Osserviamo che:

- Un segnale ad energia *finita* ha potenza media *nulla*;
- Un segnale a potenza media *finita* ha energia *infinita*.

Vediamo quindi alcuni segnali di esempio, calcolandone la potenza media e l'energia.

• **Segnale costante**

Consideriamo un primo segnale banale, cioè il segnale *costante*:

$$x(t) = 1$$

In questo caso l'*energia* è infinita e la *potenza media* costante unitaria, in accordo con le due regole enunciate prima. Questo è di facile derivazione:

$$E_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |1|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} T = +\infty$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |1|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} T = 1$$

- **Segnale gradino**

Il segnale *gradino* è un segnale che vale zero per $t < 0$ e una costante per $t \geq 0$. Si indica con $u(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Viene detto anche gradino di *Heaviside*, per cui si indica talvolta con $h(t)$.

L'*energia* del segnale gradino vale infinito mentre la *potenza media* è costante, uguale ad $\frac{1}{2}$ (in accordo con quanto detto prima). Deriviamo:

$$E_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 0 dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 dt \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T}{2} = +\infty$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 0 dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 dt \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

- **Segnale esponenziale monolatero**

Il segnale *esponenziale monolatero* vale zero per $t < 0$ e decade in maniera esponenziale per $t > 0$, cioè:

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$$

secondo un certo *tempo caratteristico* τ . Notiamo di aver usato il segnale gradino nella definizione.

Questo sarà il primo segnale che vediamo ad *energia finita*, in quanto in particolare vale $\frac{1}{2}$. Ne segue naturalmente che la *potenza media* è nulla. Deriviamo prima l'energia:

$$\begin{aligned} E_x &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t) \right|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left. -\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\tau}{2} e^{-\frac{T}{\tau}} + \frac{\tau}{2} e^0 \right) = \frac{\tau}{2} < +\infty \end{aligned}$$

e quindi la potenza media:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t) \right|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{\tau}{2} e^{-\frac{T}{\tau}} + \frac{\tau}{2} e^0 \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \frac{\tau}{2} = 0 \end{aligned}$$

- **Impulso rettangolare**

Vediamo come ultimo segnale l'*impulso rettangolare*. Questo si può intendere come la funzione:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ \frac{1}{2}, & |t| = \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

cioè il gradino di altezza 1 centrato attorno all'origine, di durata τ .

Di questa funzione si ha che l'energia, come per il segnale esponenziale monolatero, è finita. Segue che la potenza è nulla. Deriviamo:

$$E_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \tau = \tau$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \tau = 0$$

che nuovamente è in accordo con le regole enunciate prima di relazione fra energia e potenza.

• Segnale periodico

Consideriamo quindi il classico segnale *periodico*. In generale, chiamiamo *periodico* qualsiasi segnale che obbedisce la relazione:

$$x(t) = x(t + \tau), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

per un certo valore τ detto **periodo**. Chiamiamo l'opposto del periodo τ **frequenza** f :

$$f = \frac{1}{\tau}$$

In generale, per un segnale periodico vale riguardo alla potenza media:

$$P_x = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Riguardo all'energia E_x , invece, abbiamo che:

- Se la potenza media P_x è nulla, lo è anche l'energia E_x ;
- Se la potenza media P_x è $\neq 0$, l'energia E_x è infinita.

Prendiamo come esempio il classico segnale *sinusoidale*, nella sua forma più generale:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) = A \sin(2\pi f t + \phi) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\tau} t + \phi\right)$$

dove:

- A è l'*ampiezza* del segnale;
- ω è la *pulsazione* del segnale;
- ϕ è lo *scostamento di fase* del segnale;
- f e τ sono le già viste frequenza e periodo del segnale.

Fra pulsazione, frequenza e periodo vale:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{\tau}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

Calcoliamo quindi la *potenza media* della funzione sinusoidale (per la cosinusoidale vale la stessa cosa). Prendiamo per semplicità $\phi = 0$, cioè scostamento di fase nullo (al limite si può sempre reintrodurre). Avremo quindi:

$$P_x = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \left| A \sin\left(\frac{2\pi}{\tau} t\right) \right|^2 dt = \frac{A^2}{2\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 dt - \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos\left(\frac{4\pi}{\tau} t\right) dt \right) = \frac{A^2}{2\tau} \cdot \tau = \frac{A^2}{2}$$

dove l'integrale:

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos\left(\frac{4\pi}{\tau}t\right) dt = 0$$

in quanto i confini di integrazione $[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$ corrispondono col periodo di $\cos\left(\frac{4\pi}{\tau}t\right)$, per cui avremo un numero uguale di oscillazioni sopra e sotto l'asse delle ascisse (e quindi somma zero).

Quindi la potenza del segnale sinusoidale non dipende nè da ω , né da ϕ , ed è diversa da 0. Segue che l'energia è infinita. In ogni caso, quando si parla di segnali periodici non nulli, sarà conveniente riferirci alle potenze piuttosto che alle energie.

4 Lezione del 10-03-26

4.1 Onde

In telecomunicazioni avremo interesse a rappresentare **onde** a frequenza f che si muovono con velocità v nello spazio. Notiamo che solitamente si parla di onde *elettromagnetiche*, per cui $v = c = 3 \times 10^8$ m/s.

Altre grandezze che ci interessano saranno la lunghezza d'onda λ e il periodo T . Le relazioni che legano queste grandezze sono:

$$\lambda = \frac{v}{f}, \quad T = \frac{1}{f}$$

Infine, notiamo l'ampiezza dell'onda A .

4.1.1 Decibel

Per misurare l'ampiezza A di un'onda solitamente si usano i **decibel** (dB). Questa è un unità logaritmica che esprime il rapporto tra due grandezze (e in particolare due potenze):

$$P_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

dove P_0 è una certa potenza di riferimento. Date le definizioni di potenza in funzione di un segnale $x(t)$, si può dire anche:

$$P_{x,\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{|x(t)|^2}{|x(t_0)|^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{|x(t)|}{|x(t_0)|} \right)$$

dove possiamo riportare il quadrato al coefficiente, quando si parla di ampiezze anziché potenze. Infine, in relazione alle ampiezze varrà la stessa cosa:

$$A_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{A^2}{A_0^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{A}{A_0} \right)$$

analogamente a quanto detto per le potenze.

4.2 Formula di Friis

Vediamo come trattare la propagazione dei segnali nello spazio.

Se un antenna isotropica irradia un segnale di potenza P_t , la potenza misurata in un punto a distanza d sarà:

$$P = \frac{P_t}{4\pi d^2}$$

Un antenna *isotropica* è una che irradia in tutte le direzioni in maniera uguale (formando fronti d'onda sferici). Abbiamo poi che la potenza in un punto a distanza d è quella su una sfera di raggio d dal centro dell'antenna. Per questo la semplice formula: si considera (per la legge del quadrato inverso) che la potenza venga in qualche "distribuita" sulle superfici sferiche concentriche all'antenna.

Se prendiamo un antenna che riceve il segnale, di area A , abbiamo che la potenza ricevuta P_r è quindi:

$$P_r = AP = A \frac{P_t}{4\pi d^2}$$

Se sostituiamo l'area A con l'area efficiente:

$$A = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

si ottiene:

4.1: Formula di Friis

La potenza ricevuta da un antenna ricevitrice P_r , che si trova a distanza d da un antenna trasmittitrice di potenza P_t , è

$$P_r = \frac{P_t}{4\pi d^2} \frac{\lambda^2}{4\pi} = \frac{P_t}{\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2} = \beta P_t$$

Da questa legge possiamo quindi ricavare il rapporto fra le potenze a ricevitore e trasmettitore:

$$\frac{P_r}{P_t} = \beta = \frac{\lambda^2}{(4\pi d^2)}$$

da cui otteniamo quindi che:

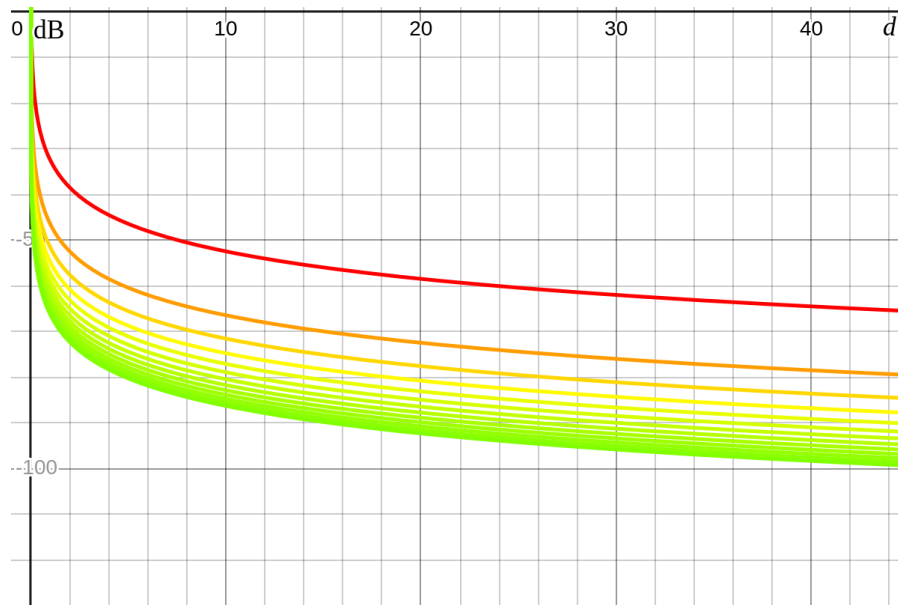
- La potenza ricevuta è inversamente proporzionale al quadrato della distanza;
- La potenza ricevuta è direttamente proporzionale al quadrato della lunghezza d'onda;
- La potenza ricevuta è comunque direttamente proporzionale alla potenza trasmessa.

Da questo l'affermazione che avevamo fatto in precedenza che a maggiore lunghezza d'onda (minore frequenza) si hanno migliori caratteristiche di trasmissione.

In decibel, questa formula appare come:

$$P_r [\text{dB}] = P_t [\text{dB}] + \beta [\text{dB}]$$

Tracciamo tali valori della potenza in decibel su un grafico con la distanza d alle ascisse:



I colori dal rosso al verde indicano 3 frequenze di trasmissione diverse:

$$f = [3 \cdot 10^9, 30 \cdot 10^9, 300 \cdot 10^9]$$

dove chiaramente la lunghezza d'onda si ricava come:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

dalla legge vista prima rispetto alle onde. Come vediamo, al crescere della frequenza (e quindi al diminuire della lunghezza d'onda) si ha che la potenza ricevuta sulla distanza diminuisce.

4.2.1 Guadagno di antenna

Le antenne in trasmissione e in ricezione possono concentrare le potenze in direzioni specifiche (e quindi diventare *anisotropiche*, o direttive). Un antenna direttiva introduce un **guadagno** di antenna. Visto che abbiamo 2 antenne (trasmissione e ricezione) si ottiene una formula del tipo:

$$P_r = \beta G_r G_t P_t$$

Notiamo che il caso $G_r = G_t = 1$ equivale al caso *isotropico*, visto prima.

4.2.2 Array di antenne

Un altro modo per incrementare la potenza ricevuta è quella di incrementare l'area aumentando il numero di antenne, magari usando una *array* di antenne.

Array sferiche

Se si hanno N antenne di superficie A disposte in maniera sferica rispetto al trasmettitore, la potenza ricevuta P_r aumenterà di N . Per riempire l'intera sfera di propagazione di antenne, avremmo bisogno di un numero di antenne pari a:

$$N = \frac{4\pi d^2}{A} = \frac{(4\pi d)^2}{l^2} = \frac{1}{\beta}$$

Questo è chiaro dal fatto che la relazione fra potenza ricevuta e trasmessa è:

$$P_r = \beta P_t \cdot N$$

per cui se $N = \frac{1}{\beta}$ si recupera tutta la potenza (ignorando il *fading*).

Array planari

Nel caso di array disposte in maniera planare rispetto al trasmettitore, avremo che di base la potenza massima che potremo ricevere sarà quella ottenuta nell'ipotesi di una configurazione planare infinita:

$$P_t = \frac{P_r}{2}$$

dal fatto che solo un emisfero dei fronti d'onda trasmessi andrà ad incontrare il piano.

4.3 Rapporto segnale-rumore

Avevamo introdotto in 1.1.2 il concetto di rapporto *segnale-rumore*, cioè di **SNR** (da *Signal-Noise Ratio*). Di base, questo ci dà una metrica dell'informazione persa sull'antenna ricevuta, ed è:

$$\text{SNR} = \frac{P_r}{P_n} = \frac{\text{Potenza del segnale ricevuto}}{\text{Potenza del rumore termico}}$$

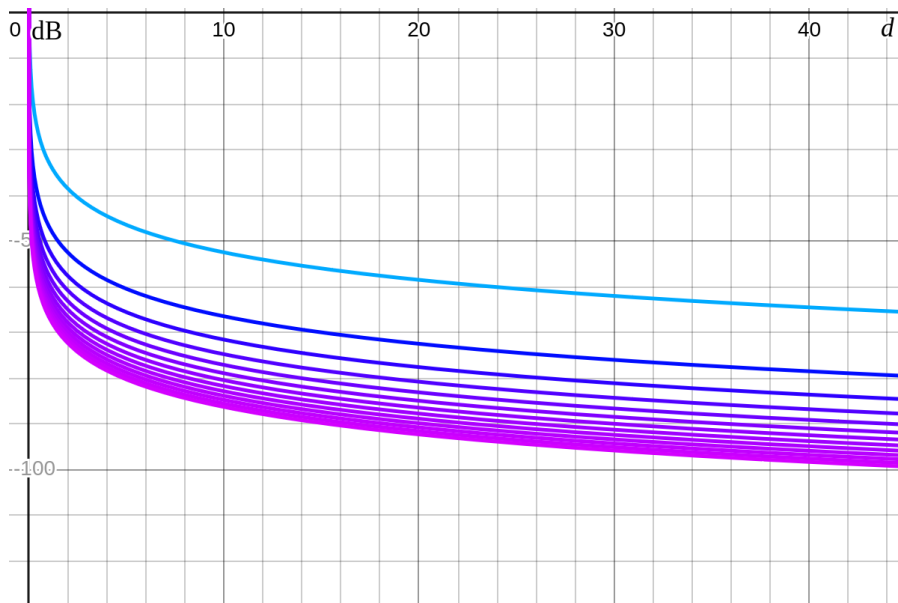
dove una buona stima di P_n è:

$$P_n = Bk_B T$$

dove B è la banda, k_B la costante di Boltzmann, e T la temperatura. Questo significa che all'aumentare della banda (quindi della frequenza f), la potenza del rumore aumenta e si ha più perdita di segnale utile.

Una volta noto P_n possiamo riportarci alla forma più generale che abbiamo visto della legge di Friis (4.1), e cioè dire:

$$P_r = G_r G_t P_t \frac{\lambda^2}{(4\pi d)^2}, P_n = Bk_B T \implies \text{SNR} = G_r G_t P_t \frac{\lambda^2}{(4\pi d)^2} \frac{1}{Bk_B T}$$



Sulla distanza, quindi, mantenendo T e B costanti si ha che l'SNR si evolve come la potenza ricevuta P_r , cioè i rapporti segnale-rumore a basse distanze sono molto alti, per cui il segnale utile sovrasta il rumore sottostante.

5 Lezione del 12-03-26

5.1 Probabilità condizionata

Nella lezione 2 avevamo visto la definizione di *probabilità* (definizione classica in 2.2, frequentistica in 2.3, e infine assiomatica attraverso gli assiomi di Kolmogorov in 2.4). Vediamo adesso la definizione di un concetto che ne deriva direttamente, cioè la **probabilità condizionata**:

5.1: Probabilità condizionata

Siano a e b due eventi, e P una funzione di probabilità valida. Chiamiamo probabilità condizionata di a dato b :

$$P[a|b] = \frac{P(a \cap b)}{P(b)}$$

Possiamo interpretare $P[a|b]$ come la probabilità dell'evento a , dato che l'evento b si è verificato, cioè la probabilità condizionata cattura l'*informazione parziale* che il verificarsi dell'evento b fornisce sull'evento a .

Notiamo che quando si dà una nuova definizione di probabilità (come quella condizionata su un solito evento b) dobbiamo comunque verificare che gli assiomi di Kolmogorov risultino verificati. Quindi:

- L'assioma di *normalizzazione* vale se si considera Ω come evento a , cioè:

$$P[\Omega|b] = \frac{P(\Omega \cap b)}{P(b)} = 1$$

in quanto $\Omega \cap b$ non è altro che b stesso;

- L'assioma di *non negatività* è banale, dal fatto che $P[a|b]$ è rapporto di valori positivi;
- L'assioma di *additività* si verifica per via algebrica, dati a_1, a_2 disgiunti:

$$P[a_1|b] + P[a_2|b] = \frac{P(a_1 \cap b) + P(a_2 \cap b)}{P(b)} = \frac{P((a_1 \cup a_2) \cap b)}{P(b)} = P[a_1 \cup a_2|b]$$

notando che se a_1 e a_2 sono disgiunti, lo saranno per forza anche $a_1 \cap b$ e $a_2 \cap b$, permettendoci di applicare l'assioma di additività definito su P .

Interpretazione frequentista

Vediamo velocemente cosa significa prendere la probabilità condizionata di a dato b se si prende come funzione P quella frequentistica vista in 2.3:

$$P(a) = \frac{n_A}{N}$$

dati N esperimenti.

$$P[a|b] = \frac{P(a \cap b)}{P(b)} = \frac{\frac{n_{a \cap b}}{N}}{\frac{n_b}{N}} = \frac{n_{a \cap b}}{n_b}$$

Teoremi di probabilità condizionata

Vediamo quindi alcuni teoremi riguardanti la probabilità condizionata:

5.1: Probabilità condizionata di eventi disgiunti

Dati due eventi disgiunti a e b , si ha:

$$P[a|b] = 0$$

1.

Questo è banale dalla definizione, visto che $a \cap b = \emptyset$ e quindi $P(a \cap b) = 0$. □

5.2: Probabilità condizionata con $a \subset b$

Dati due eventi che rispettano $a \subset b$, si ha:

$$P[a|b] \geq P(a)$$

2.

Questo si ha notando che se $a \subset b$, allora $a \cap b = a$ per cui:

$$P[a|b] = \frac{P(a \cap b)}{P(b)} = \frac{P(a)}{P(b)} \geq P(a)$$

visto che $P(b) \geq 0$ dall'assioma di non negatività. Questo, intuitivamente, significa che un evento che si verifica sempre assieme ad un secondo evento è più probabile dato il secondo evento. □

5.3: Probabilità condizionata con $b \subset a$

Dati due eventi che rispettano $b \subset a$, si ha:

$$P[a|b] = 1$$

3.

Questo è il duale del precedente, e si dimostra vedendo che $b \subset a$, allora $a \cap b = b$, per cui:

$$P[a|b] = \frac{P(a \cap b)}{P(b)} = \frac{P(b)}{P(b)} = 1$$

che è la tesi. □

5.1.1 Teorema della probabilità totale

Vediamo un importante teorema basato sulla definizione di probabilità condizionata.

5.4: Teorema della probabilità totale

Dato un evento b e una partizione di Ω data dagli eventi a_1, \dots, a_K , si ha:

$$P(b) = \sum_{i=1}^K P[b|a_i]P(a_i)$$

Questo si dimostra dicendo che, se a_1, \dots, a_k sono una partizione (quindi disgiunti) si può prendere:

$$b = b \cap \Omega = b \cap \bigcup_{i=1}^K a_i = \bigcup_{i=1}^K b \cap a_i$$

Con tutti gli eventi $b \cap a_i$ sempre disgiunti. A questo punto basta applicare l'additività nel calcolo della probabilità:

$$P(b) = P\left(\bigcup_{i=1}^K b \cap a_i\right) = \sum_{i=1}^K P(b \cap a_i) = \sum_{i=1}^K P[b|a_i]P(a_i)$$

che è la tesi. □

In altri termini, il teorema della probabilità totale permette di calcolare la probabilità di un effetto (evento b) a partire dalle probabilità di tutte le sue possibili cause (eventi a_i) e dalle probabilità delle diverse combinazioni causa/effetto (probabilità condizionate $P[b|a_i]$).

5.1.2 Teorema di Bayes

Il teorema di Bayes ci permette di invertire la probabilità totale. In particolare:

5.5: Teorema di Bayes

Note $P[a|b]$, $P(a)$ e $P(b)$, vale che:

$$P[b|a] = \frac{P[a|b]P(b)}{P(a)}$$

Questo deriva dalla definizione di probabilità condizionata:

$$P(a \cap b) = P[a|b]P(b) = P[b|a]P(a)$$

per cui, eguagliando:

$$P[b|a] = \frac{P[a|b]P(b)}{P(a)}$$

che è la tesi. □

5.1.3 Eventi indipendenti

Supponiamo che il verificarsi dell'evento a non fornisca alcuna informazione sull'evento b , cioè:

$$P[b|a] = P(b), \quad P[a|b] = P(a)$$

dove la seconda equazione viene direttamente dal teorema di Bayes. Diciamo che due eventi a e b di questo tipo sono **eventi indipendenti**. Per questi vale:

5.6: Eventi indipendenti

Dati a, b eventi indipendenti, si ha:

$$P(a \cap b) = P(a)P(b)$$

Questo è di facile dimostrazione dalle due equazioni sopra, in quanto:

$$P[a|b] = P(a) = \frac{P(a \cap b)}{P(b)} \quad P(a \cap b) = P(a)P(b)$$

che è la tesi. □

Notiamo che l'opposto di questa affermazione è:

$$P(a \cap b) = 0$$

nel caso di eventi disgiunti, che era il primo teorema che avevamo dimostrato per la probabilità condizionata.

Interpretazione frequentista

Vediamo cosa significa il teorema degli eventi indipendenti nell'interpretazione frequentistica della probabilità P . Se a e b sono indipendenti, vale:

$$P[b|a] = P(b), \quad P[a|b] = P(a)$$

e in generale conoscere b non dà alcuna informazione riguardo al conoscere a , e viceversa.

Questo significherà che:

$$\frac{n_{a \cap b}}{n_a} \approx \frac{n_b}{N}, \quad \frac{n_{a \cap b}}{n_b} \approx \frac{n_a}{N}$$

cioè rispettivamente:

- La frequenza di b , nella sequenza di N ripetizioni dell'esperimento, approssima la frequenza di b nella sequenza di n_a ripetizioni in cui si è presentato a ;
- La frequenza di a , nella sequenza di N ripetizioni dell'esperimento, approssima la frequenza di a nella sequenza di n_b ripetizioni in cui si è presentato b .

Questo vale e diventa esatto nel limite ad infinito, cioè si può dire:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_b}{N} = \frac{n_{a \cap b}}{n_a}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_a}{N} = \frac{n_{a \cap b}}{n_b}$$

sempre prendendo n_a ed n_b come sottoinsiemi di tutte le istanze di esperimento N .

5.2 Richiami di calcolo combinatorio

Concludiamo facendo alcuni richiami di **calcolo combinatorio**, in quanto spesso questo torna utile nel campo della probabilità.

5.2: Principio fondamentale del calcolo combinatorio

Se una procedura è composta di N passi, il primo dei quali può essere svolto in k_1 modi diversi, il secondo in k_2 modi diversi, e via dicendo fino a k_N , allora il numero M di modi in cui si può realizzare la procedura è:

$$M = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_N = \prod_{i=1}^N k_i$$

Nel caso per ogni passo si abbia lo stesso numero k di modi, questo semplifica a:

$$M = k^N$$

Disposizioni semplici

Con **disposizione** (semplice, senza ripetizioni) di N oggetti presi k a k si definisce una sequenza ordinata di k oggetti scelti tra gli N assegnati. Questa si calcola come:

$$D_{N,k} = N(N-1)(N-2)\dots(N-k+1) = \frac{N!}{(N-k)!}$$

Permutazioni semplici

Con **permutazione** (semplice, senza ripetizioni) di N oggetti si definisce una disposizione con $k = N$ degli oggetti. Questa si calcola come:

$$P_N = D_{N,N} = N!$$

Combinazioni semplici

Per **combinazione** (semplice, senza ripetizioni) di N oggetti presi k a k si intende una sequenza non ordinata di k oggetti scelti fra gli N dati (ovvero, due sequenze formate dagli stessi elementi in ordine diverso sono indistinguibili). Questa si calcola come:

$$C_{N,k} = \frac{D_{N,k}}{P_N} = \frac{N!}{(N-k)!k!} = \binom{N}{k}$$

Disposizioni con ripetizione

Con **disposizione con ripetizione** di N oggetti presi k a k si definisce una sequenza ordinata di k oggetti scelti tra gli N assegnati con possibilità di ripetere lo stesso oggetto più volte. Questa si calcola come:

$$D_{N,k}^{(r)} = N^k$$

Permutazioni con ripetizione

Con **permutazione con ripetizione** di N oggetti, di cui n_1 uguali tra loro, n_2 uguali tra loro, \dots , n_M uguali tra loro, con

$$n_1 + n_2 + \dots + n_M = N$$

si definisce una disposizione degli oggetti in cui gli elementi uguali sono indistinguibili. Il numero di permutazioni distinte è:

$$P_N^{(r)} = \frac{P_N}{\prod_{i=1}^M P_{n_i}} = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_M!}$$

Combinazioni con ripetizione

Per **combinazione con ripetizione** di N oggetti presi k a k si intende una scelta non ordinata di k oggetti tra gli N dati, con possibilità di ripetere lo stesso oggetto più volte. Questa si calcola come:

$$C_{N,k}^{(r)} = \binom{N+k-1}{k} = \frac{(N+k-1)!}{k!(N-1)!}$$

5.2.1 Esperimento aleatorio composto

Consideriamo ora come combinare i risultati di due esperimenti aleatori separati. Prendiamo gli spazi campione Ω_1 e Ω_2 :

$$\Omega_1 = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}, \quad \Omega_2 = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$$

Indichiamo con a_1 il generico evento del primo esperimento e con a_2 il generico evento del secondo esperimento. Inoltre prendiamo le funzioni di probabilità P_1 e P_2 .

Possiamo quindi definire l'**esperimento composto** (o a volte *esperimento congiunto*):

5.3: Esperimento composto

Un esperimento composto da due esperimenti di spazio campione Ω_1, Ω_2 (detti *componenti*), è definito con:

- Come *risultati* le coppie ordinate (ξ_i, λ_j) dei risultati degli esperimenti componenti;
- Come *spazio campione* il prodotto cartesiano $\Omega_1 \times \Omega_2$ degli spazi campione;
- Come *eventi* tutti i sottoinsiemi di Ω di tipo $a_1 \times a_2$.

Per specificare completamente l'esperimento composto dobbiamo assegnare la sua funzione probabilità P . Come minimo, vorremo che questa rispetti:

$$P(a_1 \times \Omega_2) = P_1(a_1), \quad P(\Omega_1 \times a_2) = P_2(a_2)$$

cioè la probabilità dell'evento a_1 dato un qualsiasi esito dell'esperimento 2 deve eguagliare la probabilità dell'evento a_1 nel solo esperimento 1 (e viceversa).

Esperimenti indipendenti

Consideriamo un evento a_1 nello spazio campione Ω_1 e un evento a_2 nello spazio campione Ω_2 : vogliamo calcolare la probabilità dell'evento:

$$a = a_1 \times a_2$$

nello spazio campione Ω dell'esperimento composto a partire dalla conoscenza di $P_1(a_1)$ e $P_2(a_2)$. Tale problema non ha, in generale, una soluzione: dalla conoscenza delle leggi di probabilità dei singoli esperimenti non è possibile ricavare la legge di probabilità dell'esperimento composto.

Una importante eccezione è rappresentata dagli **esperimenti indipendenti**. Se scegliamo di imporre le proprietà della funzione di probabilità P definita sull'esperimento composto, otteniamo che, stabilito:

$$a_1 \times a_2 = (a_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times a_2)$$

si ha che l'indipendenza è verificata quando:

$$P(a) = P(a_1 \times a_2) = P((a_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times a_2)) = P(a_1 \times \Omega_2)P(\Omega_1 \times a_2) = P_1(a_1)P_2(a_2)$$

ovvero quando concediamo il passaggio: $P(a_1 \times \Omega_2)P(\Omega_1 \times a_2) = P_1(a_1)P_2(a_2)$, cioè:

5.7: Esperimenti indipendenti

Imporre che 2 esperimenti, formato un esperimento composto, sono indipendenti, significa imporre che $a_1 \times \Omega_2$ e $\Omega_1 \times a_2$ rappresentano sempre eventi indipendenti.

5.3 Prove ripetute

Vediamo quindi la teoria delle **prove ripetute**, assumendo un esperimento con spazio campione Ω binario:

$$\Omega = \{a, \bar{a}\}$$

da cui si ricava subito riguardo alla funzione di probabilità che:

$$P(a) = p \implies P(\bar{a}) = 1 - p = q$$

Quello che vogliamo fare è trovare la possibilità che l'evento a si ripeta k volte su N prove, in qualsiasi ordine. In altre parole, vogliamo trovare la probabilità che si abbiano a elementi positivi nel caso dell'esperimento composto N volte, assumendo che l'esperimento in sé per sé sia *indipendente*.

Prima di tutto, calcoliamo la probabilità che si verifichi un *singolo* evento che rispetta le condizioni date:

$$P(e) = p^k q^{N-k} = p^k (1 - p)^{N-k}$$

A questo punto vorremo conoscere il numero R di sequenze distinte che contengono k eventi a , che equivale alle combinazioni di N oggetti presi k a k :

$$C_{N,k} = \frac{D_{N,k}}{P_N} = \frac{N!}{(N-k)!k!} = \binom{N}{k}$$

Ciò che ricaviamo è la cosiddetta **formula di Bernoulli**:

5.8: Formula di Bernoulli

La possibilità P che l'evento a si ripeta k volte su N prove sarà data da:

$$P = \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k (1-p)^{N-k}$$

6 Lezione del 13-03-26

6.1 Trasformata di Fourier continua

La *trasformata continua di Fourier* permette di portare un segnale $X(t)$ dal dominio del tempo t nella sua rappresentazione sul dominio delle frequenze $X(F)$. In particolare:

6.1: Trasformata di Fourier continua

Data una funzione $x(t)$, la sua trasformata di Fourier continua $X(f)$ è:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{equazione di analisi})$$

ammesso che:

- $x(t)$ sia continua C^1 a pezzi su \mathbb{R} ;
- $x(t)$ sia integrabile su tutto \mathbb{R} .

Chiamiamo la formula data anche *equazione di analisi*, in quanto permette di passare allo spettro (dominio di frequenze) del segnale (*analizzarlo*).

Notiamo che la trasformata vale per segnali $x(t)$ sia reali che complessi. Chiaramente, i segnali *fisici* sono reali. La risultante $X(f)$, invece, è sempre complessa.

Ad ogni segnale $x(t)$ corrisponde una e una sola rappresentazione in dominio delle frequenze $X(f)$, e viceversa.

Per riportarci alla rappresentazione sul dominio del tempo t originale, possiamo usare l'*antitrasformata*:

6.2: Antitrasformata di Fourier continua

Data una funzione $X(f)$, la sua antitrasformata di Fourier continua $x(t)$ è:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{i2\pi ft} df \quad (\text{equazione di sintesi})$$

ammesse le stesse ipotesi di 6.2.

Chiamiamo la formula data anche *equazione di sintesi*, in quanto permette di ricostruire un segnale dal suo spettro (dominio di frequenze) (*sintetizzarlo*).

Riguardo al meccanismo che si cela dietro alla trasformata di Fourier, possiamo dire che questa rappresenta una versione limitata all'asse complesso della trasformata di Laplace, vista in <https://raw.githubusercontent.com/seggiani-luca/appunti-ct/0ebb34499894cba25561c0b7a7bbf3db1cf0147b/master/master.pdf> probabilmente sfruttando la stessa intuizione. In particolare, avevamo preso la funzione "modello" della generica risposta all'impulso di un sistema di secondo grado:

$$x(t) = e^{-st}, \quad s = \sigma + \omega t$$

dove ricordiamo, per le formule di Eulero (viste in 1.3.2 di questi appunti):

- σ rappresentava la componente *impulsiva* della risposta, cioè il decadimento esponenziale dal picco in $t = 0$ verso $t \rightarrow +\infty$;
- ω rappresentava la componente *periodica* della risposta, cioè le risonanze sinusoidali attorno allo zero delle ordinate che decadevano secondo σ . Nel caso $\sigma = 0$, l'intero segnale era periodico senza decadimento (diremmo, per le definizioni viste in 3.2, che è ad *energia infinita*).

Potevamo quindi valutare la risposta di un sistema in confronto a tali versioni "modello" al variare di s prendendo l'integrale di convoluzione

$$\mathcal{L}[x(t)](s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad s = \sigma + \omega t$$

che era appunto la trasformata di Laplace di $x(t)$. In termini matematicamente più accurati, avevamo portato la funzione $x(t)$ dal dominio tempo al dominio s (o dominio di Laplace).

Ciò che facciamo per passare alla trasformata di Fourier è quindi imporre $\sigma = 0$, lasciando la sola componente ω . Inoltre, per avere un'espressione legata alla frequenza f (solitamente misurata in Hz) e non alla pulsazione ω , sfruttiamo le classiche relazioni:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \omega = 2\pi f \implies s = i2\pi f$$

Inoltre, consideriamo il segnale su tutto $t \in \mathbb{R}$, in quanto questo è periodico e non più legato a un transiente che fissavamo a $t = 0$ (gli estremi di integrazione sono quindi $\pm\infty$). Il risultato finale di queste modifiche è:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

che è esattamente l'espressione dell'equazione di analisi trasformata di Fourier in 6.1. Notiamo che un vantaggio di aver preso questa forma è che l'antitrasformata è considerevolmente più semplice (equivalente alla trasformata, ma su df anziché dt).

6.1.1 Spettri di ampiezza e fase

Abbiamo detto che la trasformata $X(f)$ è sempre una funzione complessa. In particolare, può essere divisa nelle componenti polari modulo ed angolo:

$$X(f) = |X(f)|e^{i \cdot \arg(X(f))}$$

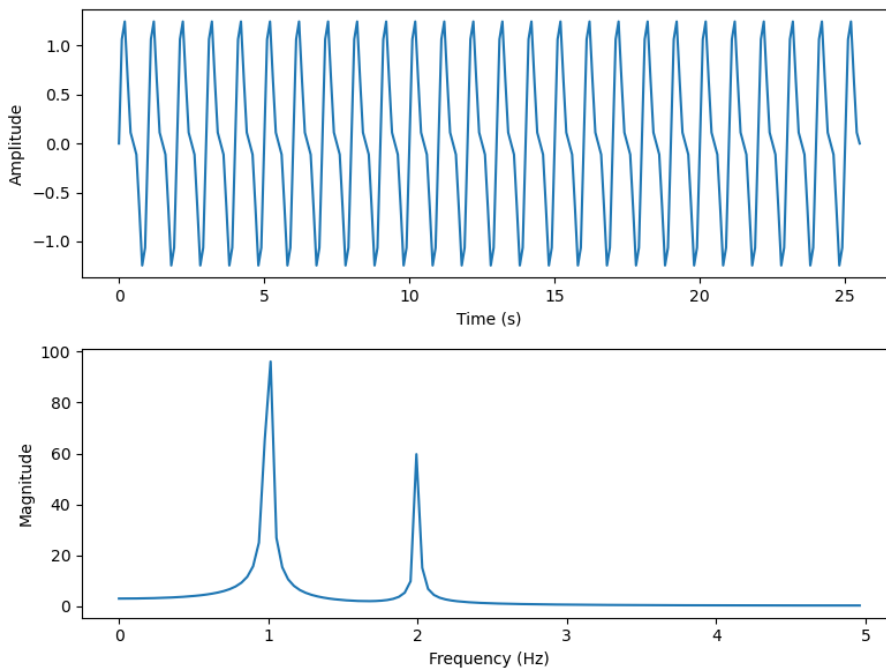
dove:

- Il modulo $|X(f)|$ ci dà lo spettro di *ampiezza* del segnale;
- L'argomento $\arg(X(f))$ ci dà lo spettro di *fase* del segnale.

Quello che rappresentano gli spettri della trasformata di Fourier sono quindi rispettivamente l'ampiezza del segnale e la sua fase in relazione alle varie frequenze f . Ciò permette di analizzare segnali periodici ottenendo informazioni riguardo alle frequenze che questi contengono. Prendiamo ad esempio la seguente funzione, che presenta componenti periodiche a 1Hz e a 2Hz

$$x(t) = \sin(2\pi t) + \frac{\sin(4\pi t)}{2}$$

Svolgiamo numericamente la trasformata di Fourier, tracciando un grafico sul tempo e un grafico dello spettro di ampiezza sulla frequenza:

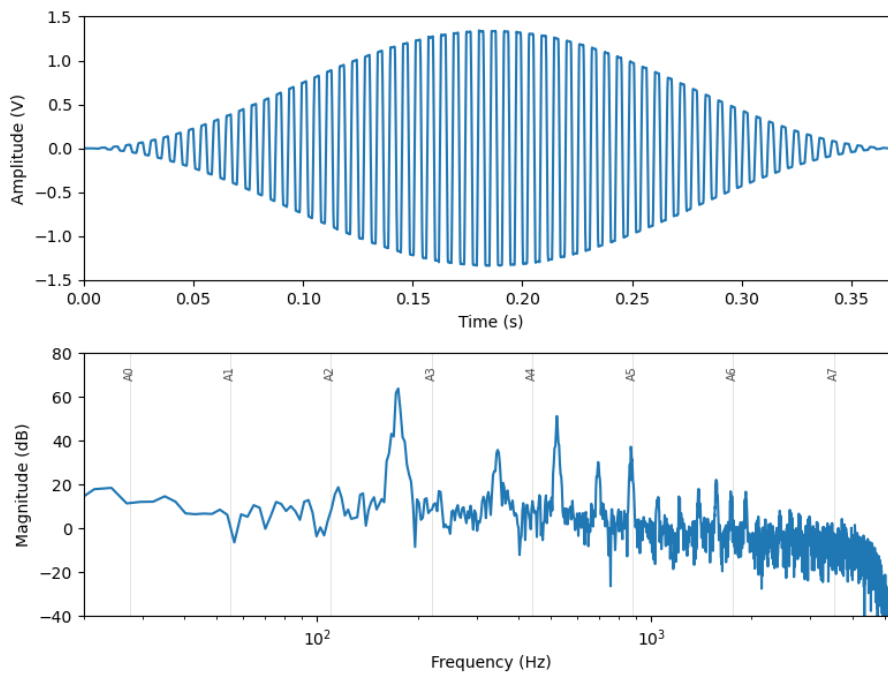


Vediamo subito come i picchi a 1Hz e a 2Hz vengono individuati dalla trasformata, e viene individuata anche l'informazione riguardo alla diversa intensità delle due componenti (la componente a 2Hz è a circa metà dell'ampiezza di quella a 1Hz).

Lo script usato per la generazione del grafico è basato sull'implementazione dell'algoritmo **DFT** (*Discrete Fourier Transform*), in particolare nella versione di *Cooley-Tukey*. Se ne trova una versione nella directory code/python di questi appunti.

Scale logaritmiche

Per i grafici delle trasformate di Fourier può essere utile adottare scale logaritmiche sia alle ascisse (frequenze) che alle ordinate (ampiezze). A tal proposito, vediamo un grafico generato con lo stesso script di prima, stavolta preso in argomento un campione di voce umana:



Notiamo le scale logaritmiche, in particolare applicate a questo grafiche:

- La scala logaritmica alle *ascisse* porta le frequenze più basse a coprire una regione maggiore del grafico. Questa rispecchia in qualche modo la percezione dei suoni dell'orecchio umano, ed è quindi indicata per diagrammi che rappresentano trasformate di Fourier di segnali sonori. In questo esempio la scala logaritmica ci permette di notare che il picco più grande del segnale è fra le note di La sulla seconda e sulla terza ottava;
- La scala logaritmica alle *ordinate* ci riporta nel dominio dei *decibel* (dB). In particolare, si prende la solita formula:

$$|X(f)|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{|X(f)|^2}{|X(f_0)|^2} \right) = 20 \log_{10} (|X(f)|)$$

che ci riporta in rapporti fra grandezze. Anche questo approccio è particolarmente utile e usato nell'analisi dei segnali sonori. Inoltre, torna utile anche nell'analisi dei segnali elettrici (come avevamo visto gli stessi diagrammi di *Bode* per gli elementi di filtraggio erano tracciati in scala logaritmica: ricordiamo che anche questi lavoravano su soli comportamenti periodici, sullo spettro delle frequenze).

Simmetrie degli spettri

Per i segnali reali $\in \mathbb{R}$ vale la simmetria *hermitiana* degli spettri:

$$X(-f) = X^*(f)$$

dove l'operatore asterisco rappresenta il coniugato. Questo si ha da:

$$X^*(f) = \int (x(t)e^{-i2\pi ft} dt)^* = \int x(t)^* e^{i2\pi ft} dt = \int x(t)e^{i2\pi ft} dt = X(-f)$$

Visto che $x(t)^* = x(t)$ (se $x(t) \in \mathbb{R}$). Notiamo che questo non è soddisfatto automaticamente dai segnali $\in \mathbb{C}$ (in quanto non si può imporre quest'ultima proprietà). \square

Vale quindi, riassumendo:

- Per i segnali reali $\in \mathbb{R}$ abbiamo determinate simmetrie dello spettro:

- Lo spettro di *ampiezza* del segnale ha simmetria *pari*:

$$|X(f)| = |X(-f)|$$

- Lo spettro di *fase* del segnale ha simmetria *dispari*:

$$\arg(X(f)) = -\arg(X(-f))$$

- Per i segnali complessi $\in \mathbb{C}$ le simmetrie appena nominate non si applicano, e possiamo avere forma qualsiasi degli spettri di *ampiezza* e *fase*.

Vediamo quindi alcuni esempi di *spettri* di alcune funzioni importanti:

• Segnale esponenziale monolatero

Come primo esempio, vediamo lo spettro dell'*esponenziale monolatero*, già vista in 3.2:

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t), \quad \tau > 0$$

dove $u(t)$ è il comune gradino di Heaviside. Notiamo che è fondamentale porre $\tau > 0$, in quanto altrimenti la $x(t)$ diverge e diventa impossibile applicare la definizione 6.1.

Quindi, lo spettro si ottiene direttamente applicando la definizione di trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(\frac{1}{\tau} + i2\pi f)} dt \\ &= -\frac{e^{-t(\frac{1}{\tau} + i2\pi f)}}{\frac{1}{\tau} + i2\pi f} \Big|_0^{\infty} = \frac{\tau}{1 + i2\pi f\tau} \end{aligned}$$

\square

Nel caso si voglia prendere $\tau < 0$, bisogna capovolgere il gradino $u(t)$ in modo da prendere sempre la parte convergente dell'esponenziale:

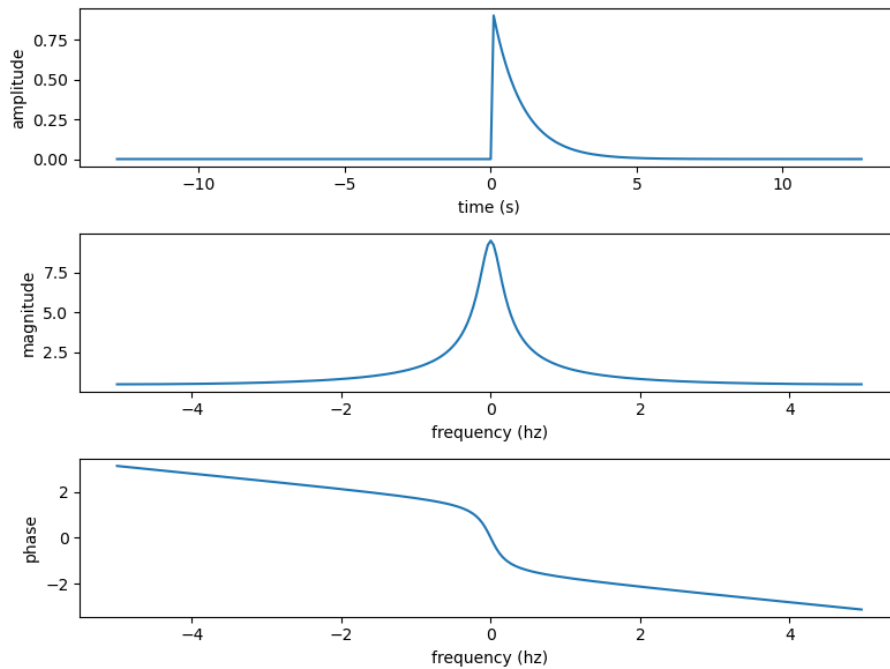
$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(-t), \quad \tau < 0$$

Per cui con passaggi simili si ottiene:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-t(\frac{1}{\tau} + i2\pi f)} dt \\ &= +\frac{e^{-t(\frac{1}{\tau} + i2\pi f)}}{\frac{1}{\tau} + i2\pi f} \Big|_0^{-\infty} = -\frac{\tau}{1 + i2\pi f\tau} \end{aligned}$$

\square

Vediamo la funzione ottenuta nel caso $\tau > 0$ su un grafico, generato con lo script precedente:



Abbiamo quindi trovato una trasformata *fondamentale* (effettivamente una coppia di esse):

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}u(t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{\tau}{1 + i2\pi f\tau}, \quad \tau > 0$$

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}u(-t) \Leftrightarrow X(f) = -\frac{\tau}{1 + i2\pi f\tau}, \quad \tau < 0$$

• **Impulso rettangolare**

Come secondo esempio, vediamo lo spettro della funzione *rettangolare*, anch'essa già vista in 3.2:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ \frac{1}{2}, & |t| = \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

Questo si ottiene direttamente applicando la definizione di trasformata di Fourier:

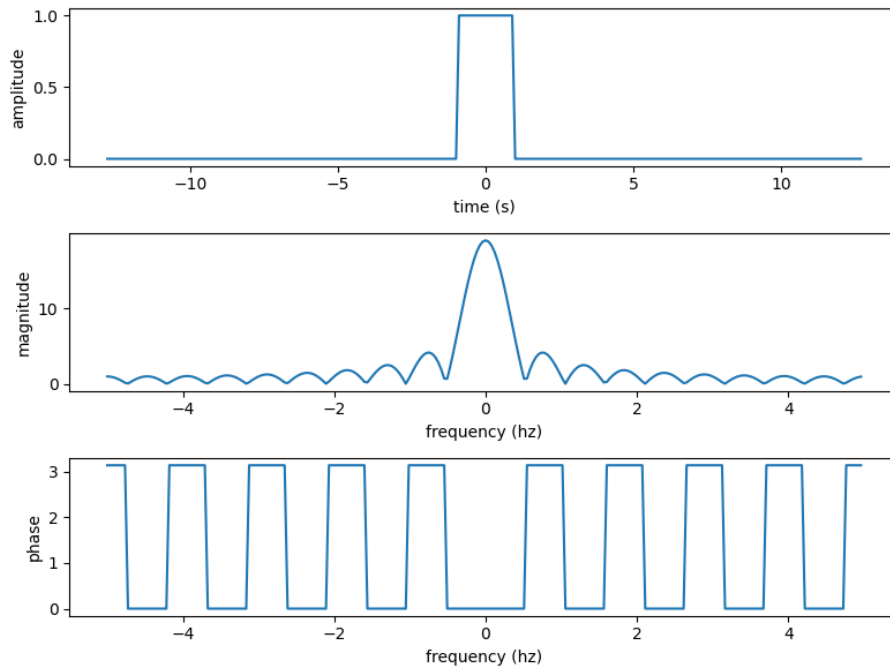
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i2\pi ft} dt = -\frac{1}{i2\pi f} e^{-i2\pi ft} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$= -\frac{1}{i2\pi f} (e^{-i\pi f\tau} - e^{i\pi f\tau}) = -\frac{1}{i2\pi f} \cdot -2i \sin(\pi f\tau) = \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f}$$

□

Notiamo che in questo caso non dobbiamo preoccuparci rispetto alle condizioni in 6.1, in quanto queste sono automaticamente rispettate, ovvero $x(t)$ è integrabile su \mathbb{R} per qualsiasi valore di τ (finché τ è finito).

Vediamo quindi la funzione ottenuta su un grafico, generato con lo script precedente:



La funzione che abbiamo incontrato prende il nome di *seno cardinale*, indicato come:

$$\text{sinc}(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} \quad \forall \alpha \neq 0, \quad \text{sinc}(0) = 1$$

dove in zero eliminiamo la discontinuità eliminabile.

Abbiamo quindi trovato un'altra trasformata *fondamentale*:

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow X(f) = \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f} \cdot \frac{\tau}{\tau} = \tau \text{sinc}(f\tau)$$

6.1.2 Teorema di Parseval

Riguardo alla trasformata di Fourier e alle definizioni di energia e potenza date in 3.2, possiamo dare l'importante teorema sull'*energia*:

6.1: Teorema di Parseval

L'energia di un segnale nel tempo è uguale all'energia in frequenza, ovvero:

$$E_x = \int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$$

Questo si può dimostrare prendendo l'energia del segnale in dominio tempo:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt$$

e riportando la $x^*(t)$ nella forma di sintesi vista prima:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)e^{-i2\pi ft} df \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \right) df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)X(f) df$$

□

Chiamiamo quindi $\mathcal{E}_x(f)$ *densità spettrale di energia*:

$$\mathcal{E}_x(f) = |X(f)|^2$$

Riguardo alla *potenza*, vale invece:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{xT}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int \frac{|X(f)|^2}{T} df = \int \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(f)|^2}{T} df$$

da dove troviamo la definizione di $\mathcal{P}_x(f)$ di *densità spettrale di potenza*:

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{|X(f)|^2}{T}$$

7 Lezione del 17-03-26

Nella scorsa lezione abbiamo descritto la trasformata di Fourier nella sua forma continua, in particolare esprimendo le equazioni di *analisi* e di *sintesi*. Vediamone adesso una forma numerica, che ci permette di trasformare segnali campionati arbitrari senza dover svolgere calcoli analitici.

7.1 Trasformata di Fourier discreta

Per "discretizzare" la trasformata di Fourier adottiamo il solito approccio alla discretizzazione di qualsiasi integrale, cioè preso:

$$x(t) \rightarrow \int x(t) dt$$

scegliamo un *intervallo di campionamento* Δt :

$$\Delta t, \quad f_s = \frac{1}{\Delta t}$$

dove f_s diventerà la nostra *frequenza di campionamento*, e portiamo l'integrale alla sommatoria:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \cdot \Delta t$$

su N istanti temporali (si conta da 0 a $N - 1$, totale N campioni).

Applicando questo processo alla trasformata di Fourier (di cui ricordiamo l'equazione di *analisi* in 6.1), otteniamo:

$$X(k\Delta f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi k\Delta f t} dt \approx \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)e^{-i2\pi k\Delta f n\Delta t}$$

dove Δt , come abbiamo già detto, è l'intervallo di campionamento del segnale *temporale*, mentre Δf è l'intervallo di campionamento sullo spettro delle *frequenze*. Spesso si prende:

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$$

per avere la cosiddetta frequenza "normalizzata".

Notiamo che nella formula a destra, n (indice temporale) e k (indice nelle frequenze) possono essere scelti in maniera arbitraria:

- Se calcoliamo la trasformata ad una certa frequenza $k\Delta f$, variamo k ;
- Per calcolare la trasformata alla frequenza $k\Delta f$, prendiamo i contributi di tutti i possibili n fra 0 e $N - 1$.

Questo significherà che potremo portare l'operazione di trasformata di Fourier discreta in forma vettoriale (è di vettori di istanti temporali o di frequenza che si parla):

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X(0) \\ \vdots \\ X((K-1)\Delta f) \end{pmatrix} = \Delta t \mathbf{F} \begin{pmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x((N-1)\Delta t) \end{pmatrix} = \Delta t \mathbf{X} \mathbf{x}$$

dove K è la lunghezza del vettore di frequenze, \mathbf{X} e \mathbf{x} sono i vettori delle frequenze e dei campioni temporali rispettivamente, campionati nei punti $0, \dots, K - 1$ e $0, \dots, N - 1$.

La matrice \mathbf{F} sarà invece quella degli operatori della trasformata di Fourier, cioè:

$$\mathbf{F}_{kn} = e^{-i2\pi k\Delta f n \Delta t}$$

Facciamo alcune considerazioni in termini di complessità. Abbiamo che:

- \mathbf{X} ha dimensione $K \times 1$;
- \mathbf{x} ha dimensione $N \times 1$;
- \mathbf{F} ha dimensione $K \times N$.

Questo significherà che il numero di operazioni necessarie è nell'ordine di:

$$O(KN) \quad (O(N^2))$$

Da cui notiamo che, visto che spesso prendiamo $K = N$, cioè tanti "bucket" (campioni) frequenziali quanti sono i campioni temporali, avremo che la complessità complessivamente sarà data da $O(N^2)$. Questo è chiaramente poco ottimale, in quanto spesso si vogliono trasformare segnali ad alte frequenze di campionamento. Abbiamo quindi bisogno di un approccio migliore.

7.1.1 Trasformata di Fourier discreta veloce

Un algoritmo più veloce per calcolare la trasformata di Fourier discreta è ad esempio quello che è stato usato per disegnare i grafici nella lezione precedente. Lo script usato per la generazione del grafico era basato sull'implementazione dell'algoritmo **FFT** (*Fast Fourier Transform*, in italiano appunto *trasformata di Fourier discreta veloce*), in particolare nella versione di *Cooley-Tukey*. Se ne trova una versione nella directory code/python di questi appunti.

L'algoritmo della trasformata di Fourier discreta veloce si basa sull'osservazione che negli N^2 passaggi dove combiniamo ogni valore di k con ogni valore di n si svolgono diverse volte calcoli che potrebbero essere fatti una volta sola, e quindi memoizzati.

Presentiamo quindi una versione specifica della trasformata di Fourier veloce, data dall'algoritmo di *Cooley-Tukey*, in versione a radice 2.

La forma della trasformata discreta che adottiamo è quella a frequenza normalizzata, cioè preso $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} nk}$$

L'intuizione sarà quindi quella di dividere la DFT di dimensione N in due DFT "interlacciate" di dimensione $\frac{N}{2}$, in modo da poter risparmiare calcoli ripetuti adottando un approccio *divide et impera*. Dal punto di vista algebrico, separiamo gli indici pari e dispari:

$$X_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-\frac{2\pi i}{N}(2m)k} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(2m+1)k}.$$

ed estraiamo uno degli esponenziali a destra:

$$X_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}mk} + e^{-\frac{2\pi i}{N}k} \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}mk}.$$

Possiamo quindi definire le due forme, che troviamo sostanzialmente equivalenti:

$$E_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}mk}, \quad O_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}mk}.$$

dove E_k è la trasformata di Fourier calcolata sui campioni "dimezzati" pari, e O_k è la sua analoga calcolata sui campioni dispari. Potremo quindi scrivere semplicemente:

$$X_k = E_k + e^{-\frac{2\pi i}{N}k} O_k,$$

cioè abbiamo un modo per riportare i risultati intermedi (calcolati su finestre dimezzate) nel risultato finale. Notiamo che la sfortuna di questo approccio è che vale solo per $n = 0, \dots, \frac{N}{2}-1$ compreso. Per calcolare il resto dei campioni frequenziali (da $n = \frac{N}{2}, \dots, N-1$), sfruttiamo le proprietà di periodicità dell'esponenziale:

$$X_{k+N/2} = E_k - e^{-\frac{2\pi i}{N}k} O_k.$$

Notiamo che i fattori:

$$e^{-\frac{2\pi i}{N}k}, \quad -e^{-\frac{2\pi i}{N}k}$$

vengono detti *fattori di twiddle*, ed è solitamente utile precalcolarli.

Questo costituisce il nucleo dell'algoritmo FFT radice 2. Possiamo applicare l'operazione di divisione in 2 finestre "dimezzate" un numero arbitrario di volte (anche se in casi reali a conviene fermarsi prima), scendendo ricorsivamente fino al caso di dimensione 1 (dove restituiamo l'unico campione dato).

Questo, in codice Python, ha il seguente (semplicissimo) aspetto:

```

1 def fft(x):
2     ln = len(x)
3     hln = ln // 2
4
5     if ln == 1:
6         # base case
7         return x
8     else:
9         # calculate even/odd FFTs
10        even = fft(x[0::2])
11        odd = fft(x[1::2])
12
13        # merge even/odd FFTs in result
14        res = [None] * ln
15        for k in range(0, hln):
16            twid = cmath.exp(-2j * math.pi * k / ln)
17            X[k] = even[k] + twid * odd[k]
18            X[k + hln] = even[k] - twid * odd[k]
19        return res

```

7.1.2 Antitrasformata di Fourier discreta

L'antitrasformata discreta di Fourier si calcola in maniera completamente duale alla trasformata. Ad esempio, prendendo la forma matriciale di prima, abbiamo che si passa alla matrice *hermitiana*:

$$\mathbf{x} = \Delta f \mathbf{F}^H \mathbf{X}$$

con \mathbf{x} , \mathbf{F} e \mathbf{X} presi come prima.

Anche la antitrasformata discreta ha un algoritmo ottimizzato, con intuizione e pseudocodice simile al precedente, che non riportiamo per semplicità. Tale algoritmo prende il nome di **IFFT** (*Inverse Fast Fourier Transform*).

7.2 Teoremi sulla trasformata di Fourier

Veniamo a vedere alcuni teoremi relativi alla trasformata di Fourier.

7.1: Linearità della trasformata di Fourier

Vale che:

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \implies X(f) = \alpha_1 X_1(f) + \alpha_2 X_2(f)$$

1.

Questo viene direttamente dalla forma dell'equazione di analisi:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_1 x_1(t) e^{-i2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_2 x_2(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

e applicando la linearità dell'operatore integrale (possiamo estrarre gli α_i), per cui:

$$X(f) = \alpha_1 X_1(f) + \alpha_2 X_2(f)$$

che è la tesi. □

7.2: Opposta della trasformata di Fourier

Vale che:

$$x(t) \rightarrow X(f) \implies x(-t) \rightarrow X(-f)$$

2.

Anche questo si ricava direttamente dalla definizione di trasformata nell'equazione di analisi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-j2\pi ft} dt$$

operando il cambio di variabile:

$$t' = -t, \quad dt' = -dt$$

per cui (ricordando di scambiare gli estremi per il capovolgimento della variabile):

$$= \int_{\infty}^{-\infty} x(t') e^{j2\pi ft'} (-dt') = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j2\pi(-f)t'} dt' = X(-f)$$

che è la tesi. □

7.3: Scalabilità della trasformata di Fourier

Vale che:

$$x(kt) \rightarrow \frac{1}{|k|} X\left(\frac{f}{k}\right)$$

3.

Possiamo considerare questo teorema una generalizzazione del precedente. Lo si dimostra prendendo l'espressione di sintesi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(kt) e^{-i2\pi ft} dt$$

e operando il cambio di variabile:

$$u = kt, \quad du = k dt$$

per cui:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(kt) e^{-i2\pi ft} dt \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-i2\pi f \frac{u}{k}} \frac{du}{k} = \frac{1}{k} X\left(\frac{f}{k}\right) \\ \int_{\infty}^{-\infty} x(u) e^{-i2\pi f \frac{u}{k}} \frac{du}{k} = - \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-i2\pi f \frac{u}{k}} \frac{du}{k} = \frac{1}{-k} X\left(\frac{f}{k}\right) \end{cases}$$

o in breve:

$$= \frac{1}{|k|} X\left(\frac{f}{k}\right)$$

che è la tesi. □

7.4: Dualità della trasformata di Fourier

Vale che:

$$x(t) \rightarrow X(f) \implies X(t) \rightarrow x(-f)$$

4.

Questo viene in qualche modo dalle osservazioni sulla simmetria fatte in 6.1.1. In particolare, scambiando t ed f nell'equazione di sintesi, si ha:

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{i2\pi tf} dt$$

per cui notiamo che dobbiamo scambiare f con $-f$ per ottenere:

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

che è la tesi. □

Vediamo alcuni esempi di applicazione di questo teorema, che è abbastanza insidioso.

(a) Applicando questo teorema, ad esempio, alla funzione rettangolare (vista sempre in 6.1.1), otteniamo:

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow \tau \text{sinc}(f\tau) \implies \tau \text{sinc}(t\tau) \rightarrow \text{rect}\left(\frac{f}{\tau}\right)$$

In questo caso possiamo stare tranquilli che le ipotesi di applicabilità dell'equazione di analisi (viste in 6.1) sono soddisfatte, in quanto la funzione sinc è sempre integrabile su \mathbb{R} .

Possiamo ottenere dei risultati interessanti interrogandoci sulla coerenza dimensionale (in termini fisici) dell'ultima espressione ricavata. Infatti il termine τ , che nel contesto dell' $x(t)$ originale rappresentava un tempo, ora va a moltiplicare un tempo (cosa che fisicamente ha poco significato). Possiamo quindi imporre una cosa del tipo:

$$\tau = 2B$$

dove B sarà una *larghezza di banda*, cioè una frequenza. In questo caso otterremo la forma:

$$2B \operatorname{sinc}(2Bt) \rightarrow \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \implies \operatorname{sinc}(2Bt) \rightarrow \frac{1}{2B} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Questa formula è interessante in quanto presenta a destra l'equazione del filtro *passa-basso* ideale, detto anche *brickwall filter*. Questo perché, come sappiamo, lo spettro di frequenze della trasformata di Fourier è simmetrico rispetto allo 0, e il grafico della funzione rect rappresenta una regione a 1 fino ad una data frequenza (B) in entrambe le regioni (negativa e positiva) simmetriche dello spettro. L' $\frac{1}{2B}$ a moltiplicare fa da termine di normalizzazione.

Sulla sinistra abbiamo invece l'antitrasformata, che anticipiamo rappresenterà la risposta all'impulso del filtro sul dominio dello spettro, del filtro brickwall. Questa è una funzione sinc (per nostra convenzione normalizzata) a frequenza $2B$. Vediamo che nel caso di segnali campionati, la funzione sinc si comporta da base come la funzione \sin si comporta da base su tutto il dominio t .

Il risultato è quindi che un segnale con spettro limitato alla frequenza massima B contiene al massimo informazione a frequenza $2B$ (ricostruibile a partire di funzioni sinc in base a frequenza $2B$), ovvero se la frequenza f delle sue componenti sarà:

$$|f| \leq B$$

lo potremo ricostruire con le funzioni base:

$$\operatorname{sinc}(2Bt)$$

In particolare, prendiamo la forma:

$$x(t) = \sum x(nT_s) \operatorname{sinc}(f_s(t - nT_s))$$

per il segnale campionato $x(t)$ sui campioni n . T_s sarà il *periodo di campionamento* e f_s la *frequenza di campionamento*, con:

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

La resa esatta del segnale sarà data scegliendo:

$$f_s = 2B$$

cioè campionando alla frequenza di *Nyquist*. Campionare a frequenze ulteriori otterremo sempre lo stesso segnale (anche se in maniera più stabile, in un regime detto di *oversampling*). Ciò che abbiamo ottenuto è quindi un'affermazione del teorema di *campionamento di Nyquist-Shannon*, già introdotto in 3.1.2.

(b) Applicandolo alla funzione esponenziale monolatera si ha un caso più complesso:

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}u(t) \rightarrow \frac{\tau}{1 + i2\pi f\tau} \implies \frac{\tau}{1 + i2\pi t\tau} \rightarrow e^{\frac{f}{\tau}}u(-f), \quad \tau > 0$$

Dove dobbiamo imporre $\tau > 0$, altrimenti la trasformata della monolatera $x(t)$ non esiste e non è valido neanche il passaggio inverso. Questo anche se la funzione trasformanda:

$$X(t) = \frac{\tau}{1 + i2\pi t\tau}$$

rimane finita.

Notiamo che una ulteriore particolarità di questo ultimo spettro è che non è simmetrico: questo è reso possibile dal fatto che il segnale considerato è *complesso* $\in \mathbb{C}$ (quindi non ha ipotesi di simmetria).

Esempio

Fissiamo i concetti con un semplice esempio. Prendiamo di voler calcolare la trasformata di:

$$z(t) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{1 + i2\pi \frac{t}{\tau}} \right\} = \{x(t)\}, \quad x(t) = \frac{1}{1 + i2\pi \frac{t}{\tau}}$$

Prendiamo prima la $x(t)$ e discutiamo poi dell'operatore parte reale. In questo caso ci tornerà utile sfruttare la dualità (teorema 7.4) dell'esponenziale monolatera, cioè dire:

$$\frac{\tau}{1 + i2\pi t\tau} \rightarrow e^{\frac{f}{\tau}}u(-f), \quad \tau > 0$$

che operando il cambio di variabile $\tau' = \frac{1}{\tau}$ diventa:

$$\frac{1}{\tau' (1 + i2\pi \frac{t}{\tau'})} \rightarrow e^{\tau' f}u(-f), \quad \frac{1}{1 + i2\pi \frac{t}{\tau'}} \rightarrow \tau' e^{\tau' f}u(-f),$$

correggendo il fattore τ' a denominatore (sfruttando la linearità, teorema 7.1). Da qui in poi, chiamiamo τ' semplicemente τ e proseguiamo.

Abbiamo quindi trasformato $x(t)$ con successo. Il problema sarà a questo punto trasformare $z(t)$, lavorando con l'operatore parte reale. Per fare ciò ricordiamo l'identità:

$$\text{Re}\{x(t)\} = \frac{x(t) + x^*(t)}{2}$$

e calcoliamo $x^*(t)$ come:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \left(\frac{1}{1 + i2\pi \frac{t}{\tau}} \right)^* = \left(\frac{1 - i2\pi \frac{t}{\tau}}{(1 + i2\pi \frac{t}{\tau})(1 - i2\pi \frac{t}{\tau})} \right)^* \\ &= \frac{1 + 2\pi \frac{t}{\tau}}{(1 + i2\pi \frac{t}{\tau})(1 - i2\pi \frac{t}{\tau})} = \frac{1}{1 - i2\pi \frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

A questo punto ci rendiamo conto che vale $x^*(t) = x(-t)$ (almeno per questa funzione), e possiamo semplicemente porre (sfruttando il teorema dell'opposto in 7.2):

$$\frac{x(t) + x^*(t)}{2} = \frac{1}{2} \left(e^{\tau f}u(-f) + e^{-\tau f}u(f) \right)$$

Notiamo che sarebbe potuto venirci in mente di usare un metodo di sostituzione di variabile anche per calcolare $x^*(t)$, cioè dire:

$$\frac{\tau}{1 + i2\pi t\tau} \rightarrow -e^{\frac{f}{\tau}}u(f), \quad \tau < 0$$

che operando il cambio di variabile $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ diventa:

$$-\frac{1}{\tau'(1 - i2\pi \frac{t}{\tau'})} \rightarrow -e^{-\tau'f}u(f), \quad \frac{1}{1 - i2\pi \frac{t}{\tau'}} \rightarrow \tau'e^{-\tau'f}u(f),$$

usando sempre la linearità. Ricordiamo che dobbiamo prendere la versione con f positiva della trasformata notevole, in quanto la sostituzione che facciamo prevede un τ' negativo (che altrimenti divergerebbe), come visto in 6.1.1. Il risultato, in ogni caso, è lo stesso.

7.5: Ritardo della trasformata di Fourier

Vale che:

$$y(t) = x(t - t_0) \implies Y(f) = X(f)e^{-i2\pi ft_0}$$

5.

Cioè un ritardo temporale introduce una variazione di fase che cambia linearmente con la frequenza, ma non cambia lo spettro di ampiezza. Diciamo linearmente, in quanto dobbiamo ricordare che:

$$|Y(f)| = |X(f)|, \quad \arg(Y(f)) = \arg(X(f)) - 2\pi ft_0$$

Questo si dimostra dall'equazione di analisi:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-i2\pi ft} dt$$

Ponendo il cambio di variabile $\alpha = t - t_0$, si ottiene:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)e^{-i2\pi f\alpha + t_0} d\alpha = e^{-i2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)e^{-i2\pi f\alpha} d\alpha$$

che è la tesi. □

7.6: Teorema della modulazione

Vale che:

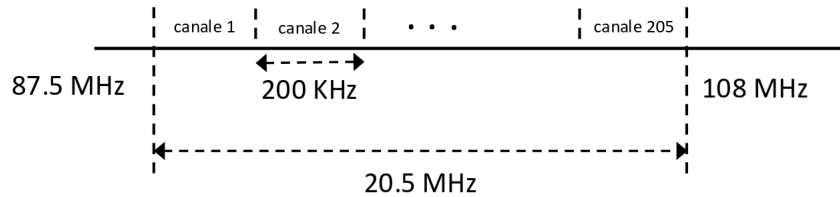
$$x(t) \cos(2\pi f_0 t) \rightarrow \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$

6.

Il teorema della modulazione è utile, appunto, nel contesto della *modulazione* dei segnali in fase di preparazione alla trasmissione sul mezzo. Nell'analisi del trasmettitore fatta in 1.2, siamo nel componente *modulator*, che prende il segnale digitale preso dal channel encoder, e lo trasforma in una forma d'onda adatta a essere trasmessa sul mezzo.

Ad esempio, nelle radio vecchio stile, la manopola del sintonizzatore variava la capacità di un circuito che faceva da filtro passa-banda, cioè isolava una sola regione dello spettro, dove era contenuto il segnale da ricevere (modulato). Oggi nella radio vale un processo simile, ma svolto attraverso transistor o in digitale.

Il fatto che si possano modulare segnali a diverse frequenze, assieme al teorema 7.1 (di *linearità*), significa che possiamo piazzare più segnali temporali a frequenze diverse dello spettro (dello spettro radio, ad esempio). Questo permette a più dispositivi di usare lo stesso mezzo di trasmissione, dividendolo in diverse porzioni di frequenze. Chiaramente, se vogliamo riportarci al segnale in dominio tempo originale, dobbiamo prevedere un passaggio di *filtraggio* simile a quello della radio a capacità visto sopra. Fra l'altro, questo è il processo dell'accesso multiplo in **FDMA** (*Frequency Division Multiple Access*) visto in 1.2.4.



Inoltre, perché la modulazione abbia l'effetto desiderato, dobbiamo scegliere frequenze di modulazione f_0 molto più grandi di quelle del segnale originale f , in modo che $f + f_0$ ci porti a destra nello spettro di frequenze (nella regione di frequenze che allochiamo al segnale) e $f - f_0$ finisca nella regione $f < 0$ (e non crei due "lobi" attorno alla f originale).

Dimostriamo quindi il teorema. Il risultato ottenuto si ha dall'equazione di analisi applicata all'espressione data:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-i2\pi f t} dt$$

e prendendo il coseno nella forma esponenziale data dalle equazioni di Eulero:

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

da cui:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}}{2} e^{-i2\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi(f+f_0)t} dt = \frac{X(f-f_0) + X(f+f_0)}{2} \end{aligned}$$

che è la tesi. □

8 Lezione del 19-03-26

In 5.2.1 abbiamo visto la *composizione* degli esperimenti, e considerato la funzione *probabilità* nel caso di esperimenti assunti *indipendenti*. Vediamo cosa succede se l'ipotesi di indipendenza viene meno.

8.1 Composizione di esperimenti non indipendenti

Posto un esperimento composto da esperimenti sugli spazi campione Ω_1, Ω_2 , questi si dicono **dependenti** se l'esecuzione del primo esperimento (sullo spazio Ω_1 modifica lo spazio Ω_2 .

In questo caso il metodo di risoluzione varia di problema in problema. Di sicuro, una soluzione che possiamo adottare è quello di considerare il primo esperimento, e valutare il risultato del secondo esperimento in funzione del risultato del primo.

8.1.1 Canale di comunicazione binario simmetrico

Facciamo un esempio pratico. Prendiamo un canale di comunicazione che può trasmettere segnali binari (0 o 1). Poniamo che:

- 1 viene trasmesso con probabilità $p = 0.3$ e 0 con probabilità $1 - p = 0.7$;
- Si ha una probabilità di errore $P_e = 0.01$ sul singolo bit (indipendentemente dal simbolo trasmesso).

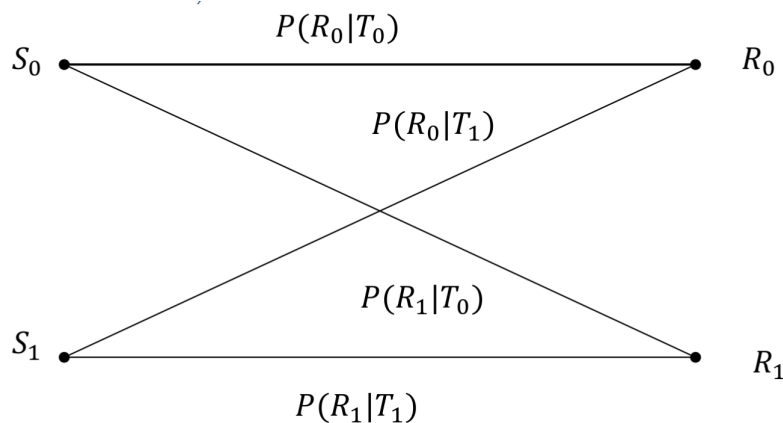
Ciò che vogliamo valutare è, ricevuto il bit 0, la probabilità che questo sia stato effettivamente trasmesso. Definiamo una serie di eventi:

- T_0 come l'evento di *trasmissione* di 0;
- T_1 come l'evento di *trasmissione* di 1;
- R_0 come l'evento di *ricezione* di 0;
- R_1 come l'evento di *ricezione* di 1;

In funzione di tali eventi, ciò che vogliamo valutare è la probabilità *condizionata* (vista in 5.1):

$$P[T_0|R_0]$$

Possiamo visualizzare le proprietà su un grafico, ponendo gli stati S_0 e S_1 (rispettivamente, inviato 0 o 1):



Il sistema è quindi concettualizzabile come due esperimenti separati ma dipendenti, dove in particolare:

$$\begin{cases} \Omega_1 = \{S_0, S_1\} \\ \Omega_2 = \{R_0, R_1\} \end{cases} \implies \Omega = \{(T_0, R_0), (T_0, R_1), (T_1, R_0), (T_1, R_1), \}$$

Possiamo quindi applicare il teorema di *Bayes* (5.5) per trovare quanto richiesto, ponendo:

$$P[T_0|R_0] = \frac{P[R_0|T_0]P(T_0)}{P(R_0)}$$

- Per il valore $P[R_0|T_0]$ abbiamo che la probabilità di errore sarà data da:

$$P_e = P[R_0|T_1] = P[R_1|T_0] = 0.01$$

da cui si può ricavare la probabilità di ricezione corretta:

$$P[R_0|T_0] = 1 - P[R_1|T_0] = 0.99$$

- Quindi conosciamo $P(T_0)$ che è uguale a 0.7;
- Infine, per trovare $P(R_0)$ si applicherà il teorema della probabilità totale (5.4):

$$P(R_0) = P[R_0|T_0]P(T_0) + P[R_0|T_1]P(T_1) = 0.99 \cdot 0.7 + 0.01 \cdot 0.3 = 0.696$$

Prendiamo quindi il risultato finale:

$$P[T_0|R_0] = \frac{0.99 \cdot 0.7}{0.696} \approx 0.996$$

Caso generale

Generalizzando P_e ad un valore qualsiasi (quindi ricezione corretta su $p = 1 - P_e$) e la probabilità che si trasmetta 1 ad α (quindi 0 su $p' = 1 - \alpha$), otteniamo:

- Per il valore $P[R_0|T_0]$ abbiamo che la probabilità di errore sarà data da:

$$P_e = P[R_0|T_1] = P[R_1|T_0] = P_e$$

da cui si può ricavare la probabilità di ricezione corretta:

$$P[R_0|T_0] = 1 - P[R_1|T_0] = (1 - P_e)$$

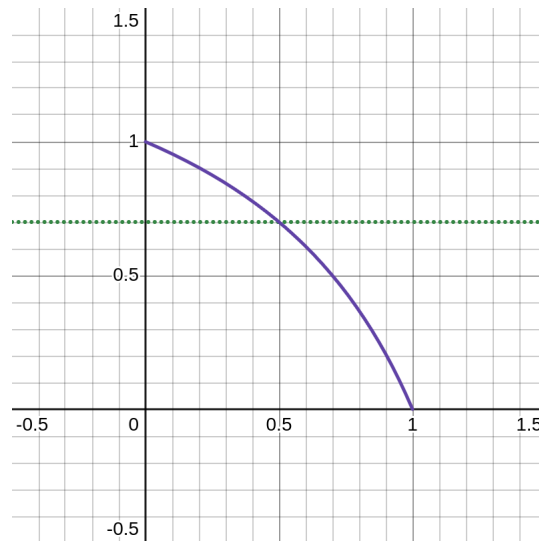
- Quindi conosciamo $P(T_0)$ che è uguale a $1 - \alpha$;
- Infine, per trovare $P(R_0)$ si applicherà il teorema della probabilità totale:

$$P(R_0) = P[R_0|T_0]P(T_0) + P[R_0|T_1]P(T_1) = (1 - P_e) \cdot (1 - \alpha) + P_e \cdot \alpha$$

Prendiamo quindi il risultato finale:

$$P[T_0|R_0] = \frac{(1 - P_e)(1 - \alpha)}{(1 - P_e) \cdot (1 - \alpha) + P_e \cdot \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{P_e \cdot \alpha}{(1 - P_e)(1 - \alpha)}}$$

Mantenuto $\alpha = 0.3$, tracciamo un grafico di $P[T_0|R_0]$ in funzione di P_e :



Da questo grafico, notiamo alcuni valori particolari:

- Per $P_e = 0$, la probabilità è piena, cioè possiamo fidarci pienamente del mezzo (non c'è possibilità di errore);
- Per $P_e = \frac{1}{2}$, cioè errori completamente aleatori, il meglio che possiamo assicurare è la probabilità:

$$P[T_0|R_0] = 1 - \alpha = P(T_0)$$

cioè la possibilità che T_0 si sia effettivamente verificato dato il segnale R_0 è al minimo uguale alla probabilità di T_0 stesso. Vedremo che questo sarà un risultato che tornerà in futuro, quando ci soffermeremo sui canali di comunicazione con segnali aleatori, cioè che soffrono di un certo livello di rumore sul mezzo (rappresentato dal nostro P_e);

- Infine, per completezza, notiamo che a $P_e = 1$ la probabilità è nulla, cioè nuovamente abbiamo informazione piena il segnale è sempre sbagliato.

8.2 Variabili aleatorie

Consideriamo uno esperimento aleatorio avente uno spazio campione Ω , una classe degli eventi S e una legge di probabilità P .

Inizialmente, possiamo definire una *corrispondenza*:

8.1: Corrispondenza

Una corrispondenza $X(\omega)$ è una funzione dei risultati di un esperimento ω che associa ad ogni risultato un numero reale.

Dalla definizione di corrispondenza ricaviamo direttamente la definizione di **variabile aleatoria**:

8.2: Variabile aleatoria

Una corrispondenza fra lo spazio Ω e l'asse reale è una variabile aleatoria se l'insieme di risultati dell'esperimento per i quali è verificata la disuguaglianza:

$$X(\omega) \leq a$$

è un evento, comunque si scelga il valore del parametro reale a .

Questo significherà che possiamo associare al generico evento del tipo $\{x(\omega) \leq a\}$ una probabilità P nel sistema di probabilità definito sopra.

Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R} che si ottengono attraverso operazioni insiemistiche sui sottoinsiemi (eventi) del tipo $\{x(\omega) \leq a\}$ sono ancora eventi, ed è quindi possibile associare loro una probabilità. In particolare, è un evento:

$$\{b < X(\omega) \leq a\} = \{X(\omega) \leq a\} - \{X(\omega) \leq b\}, \quad b > a$$

8.2.1 Funzioni di distribuzione

Possiamo quindi dare la definizione di funzione di **distribuzione** di probabilità:

8.3: Funzione di distribuzione di probabilità

Si indica come funzione di distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria X la funzione:

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\})$$

dove la variabile aleatoria $X(\omega)$ è riportata senza l'argomento ω (implicito). La definizione di variabile aleatoria vista prima assicura l'esistenza della funzione di distribuzione $F_X(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Proprietà della funzione di distribuzione

Vediamo velocemente alcune probabilità della funzione di distribuzione:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$: questo si ricava dalla definizione di probabilità (è compresa fra 0 e 1); □
2. Si ha riguardo ai limiti agli estremi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = P(\{X \leq -\infty\}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = F_X(+\infty) = P(\{X \leq +\infty\}) = 1$$

Questo si ricava dai teoremi di probabilità (in particolare i primi 2) e notando che:

$$\{X \leq -\infty\} = \emptyset, \quad \{X \leq +\infty\} = \mathbb{R} \quad (\Omega)$$

□

3. Vediamo che $F_X(x)$ è *monotona non decrescente*, ovvero:

$$x_2 > x_1 \implies F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$$

Questo si ricava notando che:

$$\{X \leq x_1\} \subset \{X \leq x_2\} \implies P(\{X \leq x_1\}) \leq P(\{X \leq x_2\})$$

□

4. Vale anche la proprietà:

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

Questo viene notando che la funzione di distribuzione può essere vista come l'unione di intervalli disgiunti:

$$\{X \leq x_2\} = \{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X \leq x_2\}$$

per cui si possono applicare le proprietà della probabilità:

$$P\{x \leq x_2\} = P\{x \leq x_1\} + P\{x_1 < X \leq x_2\}$$

cioè in termini di variabili aleatorie:

$$F_x(x_2) = F_x(x_1) + P\{x_1 < X \leq x_2\} \implies P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

che è la tesi. □

5. Notiamo che la funzione di distribuzione è *continua da destra*, quindi nei punti di discontinuità il valore della funzione coincide con il suo limite destro:

$$F_X(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$$

Risultato immediato di questo è che, se la funzione di distribuzione presenta una discontinuità di prima specie nel punto $x = \hat{x}$, la differenza tra il suo limite destro e sinistro è pari alla probabilità dell'evento $X = \hat{x}$. In simboli:

$$P(\{X = \hat{x}\}) = F_X(\hat{x}^+) - F_X(\hat{x}^-)$$

Le proprietà della funzione di distribuzione:

- $P(x_1 < X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
- $F_X(x^+) - F_X(x^-) = P\{X = x\}$

mostrano che dalla conoscenza di F_X , cioè la funzione di distribuzione di probabilità, è possibile determinare la probabilità di qualunque evento:

$$\{X \in I\}$$

essendo I un qualunque insieme reale ottenuto come somma di intervalli (chiusi, aperti, semiaperti) dell'asse reale. In altre parole, la conoscenza di F_X rappresenta una descrizione statistica completa della variabile aleatoria X .

Una descrizione statistica equivalente, ma a volte più semplice, è data dalla funzione *massa di probabilità*, nel caso di variabili aleatorie discrete, e dalla funzione *densità di probabilità*, nel caso di variabili aleatorie continue.

8.3 Variabili aleatorie discrete

Concentriamoci quindi sulle variabili aleatorie *discrete*:

8.4: Variabile aleatoria discreta

Una variabile aleatoria si dice *discreta* se assume un numero finito o una infinità numerabile di valori distinti: $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Nota una definizione di variabile aleatoria discreta, possiamo definire la funzione massa di probabilità:

8.5: Funzione massa di probabilità

Si indica come funzione massa di probabilità di una variabile aleatoria discreta X la funzione:

$$p_X(x) = P(\{X = x\})$$

questa è una funzione discreta, diversa da 0 solo in $x = x_1, \dots, x_n$.

Si può dare una definizione *frequentista* della massa di probabilità, ponendo:

$$p_X(x) = P(\{X = x_i\}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n(x_i)}{N}$$

dove $n(x_i)$ è il numero di volte che l'evento x_i si verifica su N tentativi.

9 Lezione del 20-03-26

9.0.1 Esempi di variabili aleatorie discrete

Nella scorsa lezione abbiamo visto le variabili aleatorie discrete. Vediamone adesso alcuni esempi:

- **Variabili aleatorie di Bernoulli**

Consideriamo un esperimento casuale che assume uno dei 2 valori possibili:

- Il valore 1 con probabilità p ;
- Il valore 0 con probabilità $1 - p$.

Una variabile aleatoria di questo tipo è detta variabile aleatoria di *Bernoulli*:

$$X \in \text{Bernoulli}(p)$$

- **Variabili aleatorie binomiali**

Si ripeta N volte un esperimento aleatorio nel quale un certo evento A (evento favorevole) si può presentare con probabilità p in ciascuna prova (prove indipendenti). Si può definire una variabile aleatoria X il cui valore si identifica con il numero di volte in cui si verifica l'evento A sul totale delle N prove. Tale variabile aleatoria, detta numero di successi, è di tipo discreto e può assumere i valori $X_k = 0, 1, 2, \dots, N$ con massa di probabilità:

$$p_X(k) = P(\{X = k\}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad 0 < p < 1, \quad k = 0, 1, \dots, N$$

Una variabile aleatoria di questo tipo è detta variabile aleatoria *binomiale*:

$$X \in \text{Binomiale}(p, N)$$

che notiamo a differenza della variabile aleatoria di Bernoulli è definita da 2 parametri (probabilità e numero di prove);

• **Variabili aleatorie di Poisson**

Una variabile aleatoria è detta di *Poisson* con parametro Λ (con $\Lambda > 0$) se è discreta, definita per i valori interi positivi, ed ha la seguente massa di probabilità:

$$p_X(k) = P(X = k) = \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

dove notiamo che k non chiude ad N ma prosegue ad $\rightarrow +\infty$.

Visto che andiamo su $k \in \mathbb{N}$, verifichiamo che è rispettata la normalizzazione della funzione di massa di probabilità:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = e^{-\Lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} = e^{-\Lambda} e^{\Lambda} = 1$$

dallo sviluppo di Taylor dell'esponenziale.

Vediamo alcune proprietà:

- Se $\Lambda < 1$, il picco di probabilità della funzione massa di probabilità si ha in $k^* = 0$;
- Se $\Lambda > 1$, il picco di probabilità della funzione massa di probabilità si ha in k uguale alla parte intera di Λ , cioè:

$$k^* = \lfloor \Lambda \rfloor$$

Come abbiamo già detto, chiamiamo questa variabile aleatoria di *Poisson*:

$$X \in \text{Poisson}(\Lambda)$$

che ha nuovamente un solo parametro (Λ).

9.0.2 Dalla distribuzione di probabilità discreta alla funzione massa di probabilità

Vediamo nel dettaglio come passare dalla distribuzione di probabilità discreta alla funzione massa di probabilità. Se la $F_X(x)$ (funzione massa di probabilità, 8.5) di una variabile aleatoria discreta è nota, è possibile dedurre sia i valori assunti dalla variabile aleatoria, sia le corrispondenti probabilità

In particolare, come sappiamo, la distribuzione della variabile aleatoria discreta è una funzione a gradini: i gradini sono in corrispondenza degli x_i (risultati) dove è definita la funzione massa di probabilità. In simboli:

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) = \sum_{i, x_i \leq x} P(\{X = x_i\}) = \sum_{i, x_i \leq x} p_X(x_i) = \sum_i p_X(x_i) u(x - x_i)$$

dove la funzione gradino di *Heaviside* $u(x)$, già vista nel campo delle trasformate di Fourier continue:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

ci permette di riportare gli $i, x_i \leq x$ a pedice a semplici i sui risultati dell'esperimento.

9.1 Variabili aleatorie continue

Veniamo quindi alle variabili aleatorie *continue*:

9.1: Variabile aleatoria continua

Una variabile aleatoria si dice *continua* se assume un numero infinito non numerabile di valori (ad esempio, tutti i reali in un intervallo $[a, b]$).

Nello specifico, la continuità si definirà come:

$$F_X(x^+) = F_X(x^-)$$

Notiamo che se prendiamo questa definizione, la probabilità di trovare la variabile aleatoria ad un qualsiasi valore è nulla, cioè:

$$P(\{X = x\}) = 0, \forall x$$

L'unica cosa che potremo prendere $\neq 0$ sarà allora la probabilità su un *intervallo*:

$$P(\{x_1 \leq X \leq x_2\}) \neq 0, \in [0, 1]$$

Inoltre, prendere funzioni continue ci permette di sollevare le condizioni sulla strettezza delle diseguaglianze che definiscono i nostri intervalli, in quanto nulla cambia se prendiamo $< o \leq$. Varrà quindi:

$$P(\{x_1 \leq X \leq x_2\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

Nota una definizione di variabile aleatoria continua, possiamo definire la funzione **densità** di probabilità:

9.2: Funzione densità di probabilità

Si indica come funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria continua X la funzione:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

cioè la *derivata prima* della funzione distribuzione di probabilità della variabile aleatoria.

Sulla funzione densità di probabilità valgono le seguenti proprietà:

1. $f_X(x) \geq 0$, visto che è la derivata prima di una funzione monotona crescente;
2. Dal teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\alpha) d\alpha$$

3. Sempre riguardo all'integrazione, vale sugli intervalli (come avevamo parzialmente già detto):

$$P(\{x_1 \leq X \leq x_2\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(\alpha) d\alpha$$

4. Prendendo gli estremi a $\pm\infty$ nell'ultima proprietà, otteniamo la proprietà di normalizzazione:

$$F_X(\infty) - F_X(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\alpha) d\alpha = 1$$

Notiamo che un corollario di ciò è che:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_X(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_X(x) = 0$$

Intuizione dietro la densità di probabilità

Prendiamo un intervallino $[x_1, x_2]$:

$$x_1 = x, \quad x_2 = x + dx$$

con dx infinitesimo. Dalla terza proprietà della densità di probabilità, si ha che:

$$\int_x^{x+dx} f_X(x) dx = f_X(x) dx = P(x < X \leq x + dx)$$

per cui:

$$f_X(x) = \frac{P(x < X \leq x + dx)}{dx}$$

Quindi, la densità probabilità rappresenta la probabilità (al variare di x) che la variabile aleatoria X assuma valori appartenenti all'intervallo infinitesimo $[x, x + dx]$, diviso l'ampiezza infinitesima dx dell'intervallo.

Questa proprietà è utile per misurare sperimentalmente la densità di probabilità di una variabile aleatoria passando alla frequenza relativa; infatti, se ripetiamo l'esperimento N volte e contiamo il numero $\Delta n(x)$ di risultati per cui $x < X \leq x + \Delta x$, otteniamo:

$$f_X(x)\Delta x \approx P(x < X \leq x + \Delta x) \approx \frac{\Delta n(x)}{N}$$

purché Δx sia sufficientemente piccolo ed N sufficientemente grande, quindi la densità di probabilità si può ottenere come segue:

$$f_X(x) = \frac{\Delta n(x)}{N\Delta x}$$

10 Lezione del 26-03-26

10.1 Modulazione nei sistemi di comunicazione

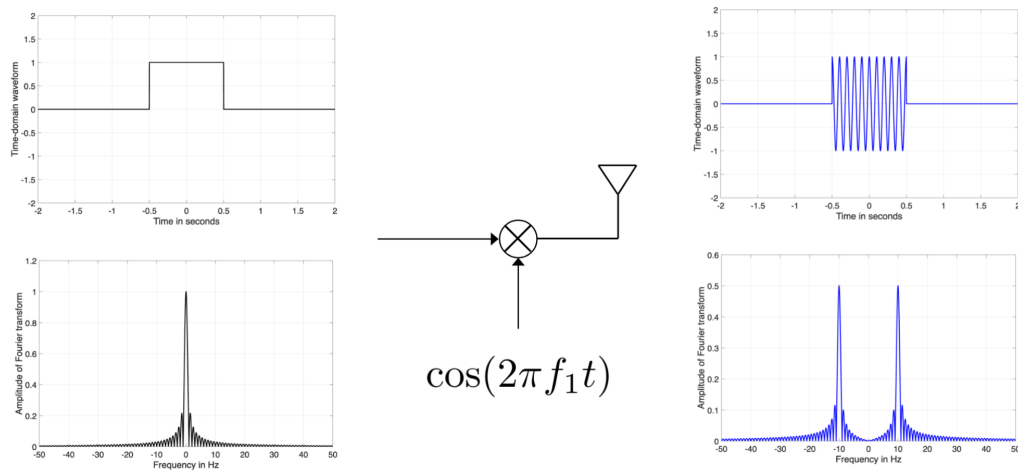
Im 7.2 abbiamo visto una serie di teoremi relativi alla trasformata di *Fourier*. In particolare, il teorema 7.6 di *modulazione* ci mostrava che modulando un segnale per una cosinusoide a frequenza f_0 si otteneva riguardo alla trasformata:

$$x(t) \cos(2\pi f_0 t) \rightarrow \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$

cioè si otteneva una trasformata analoga a quella del segnale non modulato, ma scostata in frequenza di f_0 .

Sfruttare il teorema di modulazione ci permette di realizzare sistemi di comunicazione a *modulazione*, dove un *modulatore* trasforma il segnale prima di trasmetterlo per occupare una certa banda, e un *demodulatore* estrae il segnale da tale banda prima di riprodurlo.

- Vediamo innanzitutto il componente **modulatore**:

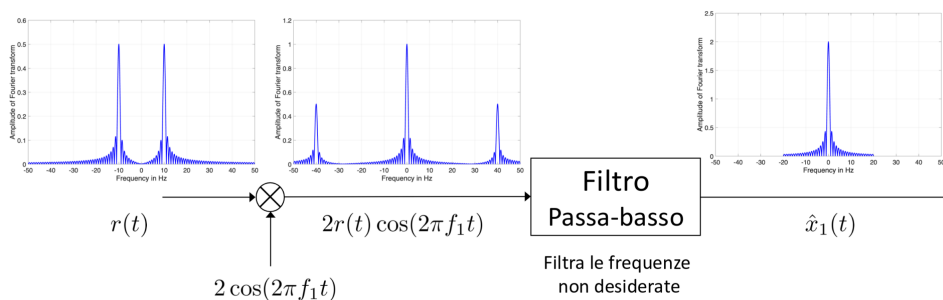


Avevamo anticipato questo dispositivo negli elementi di un sistema di comunicazione in 1.2. Questo non fa altro che moltiplicare un segnale per una oscillazione cosinusoidale ad una data frequenza f_0 , in modo da portarne lo spettro in una regione prestabilita. In simboli:

$$s(t) \rightarrow s(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

Quindi si sfrutta direttamente il teorema della modulazione per portare il segnale da un centro di frequenza attorno a zero, ad uno attorno ad f_0 . Questo sarà quindi utile ai fini della spartizione dello spettro del mezzo di trasmissione fra più sorgenti (si pensi alla radio che trasmette su più canali). Ricordiamo inoltre che (come visto sempre in 7.6), perché la modulazione abbia l'effetto desiderato, dobbiamo scegliere frequenze di modulazione f_0 molto più grandi di quelle del segnale originale f , in modo che $f + f_0$ ci porti a destra nello spettro di frequenze (nella regione di frequenze che allochiamo al segnale) e $f - f_0$ finisca nella regione $f < 0$ (e non crei due "lobi" attorno alla f originale);

- Corrispondente al modulatore sarà il **demodulatore**:



Questo sarà un secondo dispositivo che si occupa di riportare il segnale modulato al segnale originale. Questo si può fare con una successiva moltiplicazione per $2 \cos(2\pi f_0 t)$. Si ha infatti che il segnale $r(t)$ ricevuto dall'antenna del demodulatore è una qualche approssimazione del segnale trasmesso dal modulatore:

$$r(t) = s(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

e moltiplicando si ottiene il seguente risultato.

$$\implies s(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_0 t) = 2s(t) \cos^2(2\pi f_0 t) = s(t) + s(t) \cos(4\pi f_0 t)$$

dalle proprietà del coseno.

Questo significa che riusciamo ad ottenere il segnale originale, più una componente ad alta frequenza ($\cos(4\pi f_0 t)$). Questa verrà rimossa da un successivo stage di filtraggio passa basso, che rimuoverà la componente.

Saremmo quindi riusciti ad ottenere nuovamente il segnale demodulato (o una sua approssimazione), dopo averlo trasmesso, modulato, ad un range di frequenze specifico e selezionato dalla frequenza di modulazione f_0 .

10.1.1 Somma di più segnali

Vediamo nello specifico questo processo studiando cosa succede nel caso di più segnali modulati trasmessi sullo stesso mezzo di comunicazione. Siano questi s_1, s_2 e s_3 funzione del tempo trasmessi da altrettante antenne collegate a modulatori. Ad ogni modulatore verrà chiaramente assegnata la sua frequenza di modulazione f_i . Avremo che il segnale complessivo che viaggia sul mezzo condiviso sarà:

$$\{s_1(t), s_2(t), s_3(t)\} \rightarrow s_1(t) \cos(2\pi f_1 t) + s_2(t) \cos(2\pi f_2 t) + s_3(t) \cos(2\pi f_3 t)$$

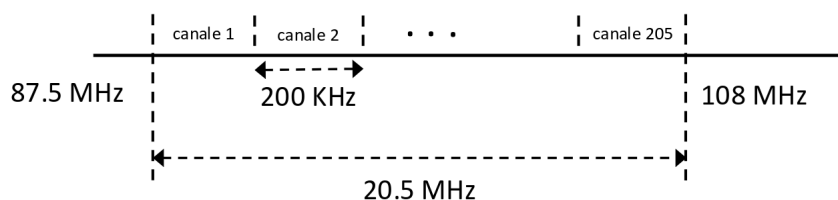
Quello che vedrà un demodulatore sullo stesso mezzo sarà quindi la somma dei segnali trasmessi. Potremmo chiederci allora come facciamo ad isolare un dato segnale dalla combinazione lineare di tutti i segnali che abbiamo messo in trasmissione nell'etere. La soluzione sarà dato dallo stage di filtraggio passa basso, previsto a termine del processo di demodulazione, e pensato per rimuoverà la componente ad alta frequenza che ottenevamo in:

$$s_i(t) + s_u(t) \cos(4\pi f_i t)$$

L'idea è che le frequenze $4\pi f_i$ andranno a finire distanti l'una dall'altra, per cui in fase di filtraggio dell' i -esimo segnale potremo rimuovere completamente l'effetto degli altri segnali modulati, e quindi ottenere l'isolamento che ci prefissavamo di avere.

Radio

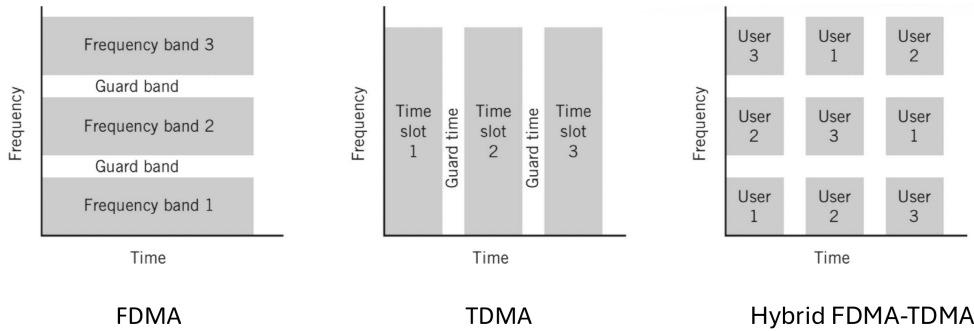
Come abbiamo visto in 7.6, il teorema di modulazione ed in genere le tecniche di modulazione e demodulazione sono fondamentali al campo della trasmissione radio. Infatti, il fatto che si possano modulare segnali a diverse frequenze, assieme al teorema 7.1 (di linearità), significa che possiamo piazzare più segnali temporali a frequenze diverse dello spettro (in questo caso dello spettro radio).



In particolare, nel *broadcasting FM* (lo standard moderno della radio analogica) si ha una banda di frequenze che va dagli 87.5 MHz ai 108 MHz, suddivisa in circa 205 canali che possono essere allocati alle stazioni.

Reti cellulari

Un utilizzo simile della modulazione viene fatto nell'accesso multiplo in divisione di frequenza (**FDMA**, *Frequency Modulation Multiple Access*), usato dalle reti mobili come ad esempio il 4G LTE.

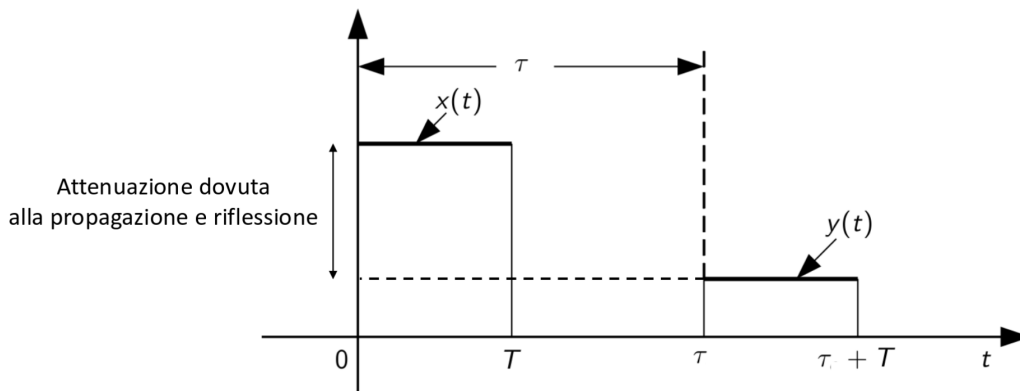


Anche in questo caso, si divide lo spettro del mezzo in più bande di frequenza, allocata ognuna ad un diverso trasmettitore. In particolare, avevamo visto che il 4GLTE sfrutta un apporccio *ibrido* FDMA-TDMA, dove si divide il mezzo sia in slot temporali che bande di frequenza, ottenendo quindi una sorta di *matrice* di slot disponibili per la trasmissione.

10.2 Eco radar

Nei sistemi **radar**, si invia un segnale che si propaga nello spazio finché non si incontra un ostacolo. La successiva riflessione dall'ostacolo riporta il segnale originale al ricevitore, dopo un certo tempo τ .

Poniamo di avere un segnale $x(t)$ trasmesso, equivalente alla funzione $\text{rect}(\frac{t}{T})$, e di tracciare il suo eco radar $y(t)$ dopo il tempo τ :



Sul grafico notiamo come l'intensità del segnale $y(t)$ viene ridotta per effetto della *attenuazione* di propagazione e riflessione. In 4.1 avevamo discusso la formula di Friis, e avevamo definito il rapporto di potenza fra trasmettitore e ricevitore β :

$$\beta = \frac{P_r}{P_t} = \frac{\lambda^2}{(4\pi d^2)}$$

dove λ è la lunghezza d'onda del segnale $x(t)$, e la distanza d non sarà altro che la distanza dell'ostacolo stesso (in questo caso il trasmettitore e il ricevitore sono nella stessa posizione).

Il sistema funziona quando i due segnali $x(t)$ e $y(t)$ non si sovrappongono, ossia il segnale trasmesso $x(t)$ non si sovrappone con il segnale che si riceve $y(t)$. La condizione imposta sarà quindi:

$$T \ll \tau$$

Per calcolare τ dovremmo conoscere la velocità del segnale (poniamo c), e quindi dovremmo prendere come distanza $2d$ (in quanto il segnale deve *arrivare* e *tornare* al dispositivo). In simboli:

$$\tau = \frac{2d}{c}$$

Abbiamo quindi la possibilità di trovare l'espressione esplicita di $y(t)$ in funzione di $x(t)$ e delle caratteristiche del mezzo e dell'ostacolo che incontriamo:

$$y(t) = \sqrt{\beta}x(t - \tau)$$

dove $x(t - \tau)$ indica effettivamente lo scostamento temporale dato dalla distanza $2d$ complessiva che il segnale deve percorrere. Prendiamo la radice quadrata dell'attenuazione β in quanto i segnali $x(t)$ e $y(t)$ si trovano nel dominio di potenza, e non ampiezza, per cui dobbiamo passare alle radici.

Modulazione nei sistemi radar

Il teorema di modulazione, di cui abbiamo visto i vantaggi nei sistemi di comunicazione per il partizionamento dello spettro dei mezzi di trasmissione, ha una sua utilità anche nei sistemi radar. Abbiamo infatti che la riflessione è migliore per segnali ad alta frequenza (questo dal λ a numeratore del fattore di attenuazione β , maggiore frequenza significa minore attenuazione). In simboli questo si ha da:

$$\lambda = \frac{c}{f_0}$$

Il problema è che è molto difficile ottenere segnali che superino una certa soglia di frequenza. Di base, infatti, vorremo usare segnali *rect* che consistono in una singola oscillazione dallo zero al valore massimo (come la nostra $x(t)$), ed è improbabile ridurre ulteriormente la durata del segnale oltre una certa soglia.

La soluzione consiste nel modulare il segnale ad una frequenza maggiore, approfittando del fatto che questo porta tutto lo spettro del segnale ad una frequenza maggiore f_0 . In particolare notiamo i range:

- 24.0 MHz - 25.25 MHz per il **SRR** (*Short Range Radar*);
- 76 MHz - 81 MHz per il **MRR** (*Medium Range Radar*).

10.3 Teorema del prodotto

Ricollegiamoci ai teoremi di 7.6 introducendo il cosiddetto *teorema del prodotto*, che è un'affermazione simile a quella del *prodotto di convoluzione* sulla trasformata di Laplace:

10.1: Prodotto della trasformata di Fourier

La trasformata del prodotto di due funzioni $x(t)$ e $y(t)$ è il prodotto di convoluzione (o *integrale di convoluzione*) delle trasformate:

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) \implies Z(f) = \int_{v=-\infty}^{v=\infty} X(v)Y(f - v) dv = X(f) \otimes Y(f)$$

La dimostrazione di questo risultato si ha dall'equazione di *analisi*:

$$Z(f) = \int_{t=-\infty}^{t=\infty} x(t)y(t)e^{-i2\pi ft} df$$

in cui possiamo riscrivere il fattore $x(t)$ secondo l'equazione di *sintesi*:

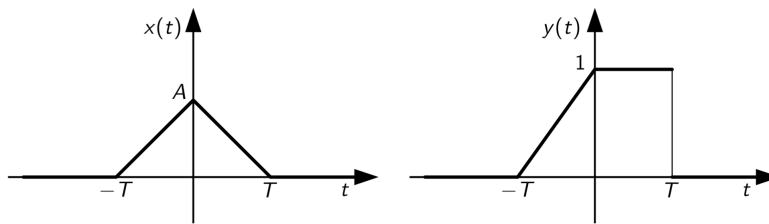
$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{t=-\infty}^{t=\infty} \left(\int_{v=-\infty}^{v=\infty} X(v)e^{i2\pi vt} dv \right) y(t)e^{-i2\pi ft} df \\ &= \int_{v=-\infty}^{v=\infty} X(v) \left(\int_{t=-\infty}^{t=\infty} y(t)e^{-i2\pi(f-v)t} dt \right) dv = \int_{v=-\infty}^{v=\infty} X(v)Y(f-v) dv = X(f) \otimes Y(f) \end{aligned}$$

che notiamo è esattamente la tesi. □

Richiami sul prodotto di convoluzione

Facciamo quindi alcuni richiami su cosa è esattamente il prodotto di convoluzione fa due funzioni $x(t)$ e $y(t)$ (queste non sono le funzioni della dimostrazione precedente, che moltiplicavamo in dominio tempo, ma altre 2 funzioni nel dominio tempo arbitrarie, di cui facciamo il prodotto di convoluzione). Lavoriamo nel dominio tempo anziché il dominio frequenziale in quanto è più comodo.

Procediamo quindi ad una descrizione qualitativa prendendo le due funzioni $x(t)$ e $y(t)$:



Osservando la formula del prodotto di convoluzione:

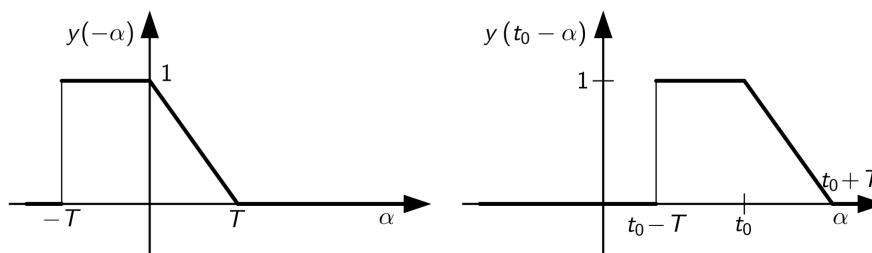
$$[x(t) \otimes y(t)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g(t - \alpha) d\alpha$$

si ha che prendiamo per ogni valore di t (prendiamo uno specifico $t = t_0$) un integrale in α . t_0 è quindi sostanzialmente un parametro per una serie di integrali che calcoliamo, al variare di t su \mathbb{R} .

Ciò che facciamo per ogni valore t_0 è quindi:

- Invertire la funzione $y(\alpha)$, prendendo $y(-\alpha)$;
- Scostare temporalmente la $y(\alpha)$ di un fattore t_0 , prendendo $y(t_0 - \alpha)$.

Ciò che abbiamo detto è meglio esemplificato dal grafico:

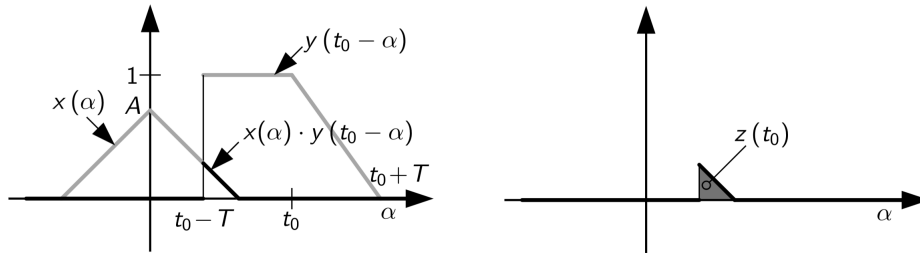


dove vediamo chiaramente la $y(t)$ invertita e scostata temporalmente di t_0 .

A questo punto non resterà altro che calcolare l'integrale in α nell'intervallo $[-\infty, \infty]$:

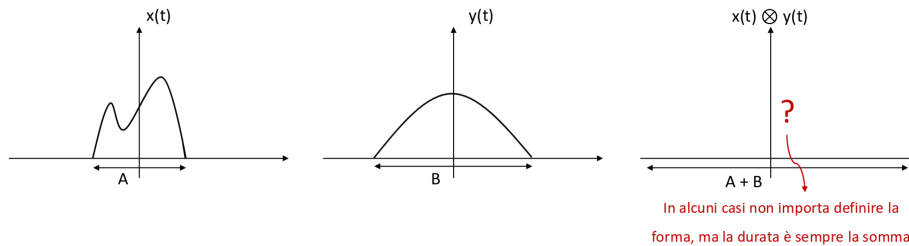
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g(t_0 - \alpha) d\alpha$$

Il valore che otteniamo per t_0 sarà quello dell'integrale di convoluzione a $t = t_0$. Sul grafico:



Ripetendo questo processo per ogni t su \mathbb{R} , si potrà ottenere tutta la funzione dell'integrale di convoluzione.

In generale, poi, ricordiamo che il supporto dell'integrale di convoluzione tra due funzioni aventi estensione limitata è dato dalla somma delle estensioni delle due funzioni.



Esempi di convoluzione

Vediamo quindi alcuni esempi significativi di prodotto di convoluzione fra due funzioni $x(t)$ e $y(t)$.

1. Innanzitutto, riprendiamo la funzione $rect$ con $T = 2B$ (larghezza di banda) già studiata in 7.2 come filtro passa basso ideale:

$$x(t) = \text{sinc}(2Bt) \rightarrow X(f) = \frac{1}{2B} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Prendiamo $x(t) = y(t) = \text{sinc}(2Bt)$ per calcolare l'antitrasformata del quadrato della funzione sinc :

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) = \text{sinc}^2(2Bt)$$

Avremo quindi da calcolare l'integrale di convoluzione:

$$Z(f) = X(f) \otimes Y(f) = \frac{1}{2B} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \otimes \frac{1}{2B} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Notiamo allora che entrambe le funzioni sono rettangoli, di larghezza $2B$ e altezza $\frac{1}{2B}$, e che per il principio dell'operazione di convoluzione ne fissiamo uno facendo scorrere l'altro (come una sorta di *sliding window*) al variare di f :

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(v)Y(x - v) dv$$

Questo significherà, fissato un certo f_0 , che avremo 4 regioni:

$$\begin{cases} f_0 < -2B \rightarrow 0 \\ -2B \leq f_0 < 0 \rightarrow \int_{-B}^{f_0+B} \frac{1}{4B^2} dv \\ 0 \leq f_0 \leq 2B \rightarrow \int_{f_0-B}^B \frac{1}{4B^2} dv \\ f_0 > 2B \rightarrow 0 \end{cases}$$

e quindi la funzione complessiva sarà, svolti gli integrali (gli estremi sono banali, e i due integrali centrali pure in quanto semplificano a moltiplicazioni):

$$Z(f) = \begin{cases} \frac{1}{2B} \left(\frac{f}{2B} + 1 \right), & -2B \leq f < 0 \\ \frac{1}{2B} \left(1 - \frac{f}{2B} \right), & 0 \leq f \leq 2B \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione che abbiamo ottenuto prende anche il nome di *funzione triangolare* *tri*, che indichiamo come:

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |2t|, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

per cui il risultato della convoluzione può essere indicato anche come:

$$\text{sinc}^2(2Bt) \rightarrow \frac{1}{2B} \text{tri} \left(\frac{f}{4B} \right)$$

2. Sempre per dimostrare il funzionamento dell'integrale di convoluzione, svolgiamo una semplice convoluzione in dominio tempo, fra le funzioni:

$$x(t) = \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right), \quad y(t) = \text{rect} \left(\frac{2t}{T} \right)$$

Ciò che vorremo calcolare sarà quindi:

$$[x(t) \otimes y(t)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) Y(t - \tau) d\tau$$

Come prima, sfruttiamo le proprietà della funzione *rect* per dividere l'integrale in regioni. Manteniamo quindi fissa la $x(t)$ e facciamo scorrere la $y(t)$ prendendo un istante t_0 :

$$\begin{cases} t_0 < -\frac{3}{4}T \rightarrow 0 \\ -\frac{3}{4}T \leq t_0 < -\frac{1}{4}T \rightarrow \int_{-T}^{t_0+\frac{1}{4}T} d\tau \\ -\frac{1}{4}T \leq t_0 < \frac{1}{4}T \rightarrow \int_{t_0-\frac{1}{4}T}^{t_0+\frac{1}{4}T} d\tau \\ \frac{1}{4}T \leq t_0 < \frac{3}{4}T \rightarrow \int_{t_0-\frac{T}{4}}^T d\tau \\ t_0 \geq \frac{3}{4}T \rightarrow 0 \end{cases}$$

e quindi la funzione complessiva sarà, svolti gli integrali (gli estremi sono banali, e i tre integrali centrali pure in quanto semplificano a moltiplicazioni):

$$[x(t) \otimes y(t)](t) = \begin{cases} t + \frac{3}{4}T, & -\frac{3}{4}T \leq t < -\frac{1}{4}T \\ \frac{T}{2}, & -\frac{1}{4}T < t \leq \frac{1}{4}T \\ -t + \frac{3}{4}T, & -\frac{3}{4}T \leq t < -\frac{1}{4}T \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Abbiamo quindi ricavato la funzione dell'integrale di convoluzione per ogni $t \in \mathbb{R}$. Il risultato sarà una sorta di trapezio con picco costante in $\frac{T}{2}$ da $-\frac{1}{4}T$ a $+\frac{1}{4}T$.

Una cosa da notare è che quanto avevamo detto riguardo al supporto risulta dimostrato: $x(t)$ si esprime su un supporto di larghezza T , e $y(t)$ su un supporto di $\frac{T}{2}$. Sommando gli estremi trovati per l'integrale di convoluzione si ha:

$$\frac{3}{4}T + \frac{3}{4}T = \frac{3}{2}T = T + \frac{T}{2}$$

che è esattamente la somma dei supporti delle funzioni coinvolte nella convoluzione.

10.3.1 Teorema della convoluzione

Vediamo qual'è il duale del teorema del prodotto per la trasformata di Fourier, cioè il *teorema della convoluzione*:

10.2: Convoluzione della trasformata di Fourier

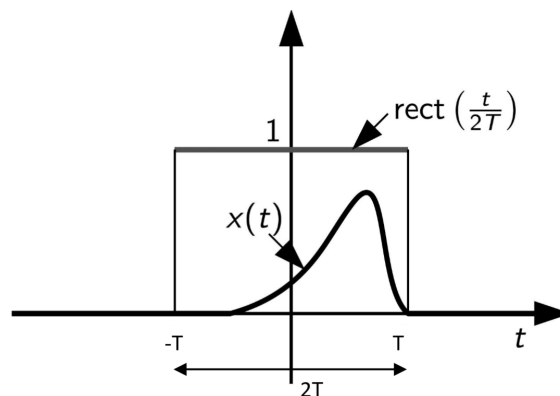
La trasformata della convoluzione di due funzioni $x(t)$ e $y(t)$ è il prodotto delle trasformate:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \implies Z(f) = \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} x(\alpha)y(t - \alpha) d\alpha = Z(f) = X(f) \cdot Y(f)$$

Cioè alla convoluzione nel tempo corrisponde il prodotto delle trasformate. Questo è un altro risultato fondamentale per i sistemi lineari e tempo invarianti, e si dimostra direttamente dal teorema del prodotto della trasformata di Fourier in 10.1.

10.4 Definizione di banda

Prendiamo un segnale $x(t)$ a durata finita. Ad esempio, il modo per assicurarsi di avere durata finita può essere moltiplicare per la funzione *rect* (che per definizione ha durata finita).



Il problema su cui ci interroghiamo è se questo segnale ha anche *spettro* finito. Questo è automaticamente impossibile, in quanto dalle prime definizioni viste in 6.1.1 si ha che la trasformata della funzione *rect* è la funzione *sinc*, che ha spettro infinito.

Prendere il segnale moltiplicato per la funzione rect, cioè in simboli:

$$z(t) = x(t)\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

equivale a prendere la $y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ nel teorema del prodotto e quindi ottenere il prodotto di convoluzione:

$$X(f) = X(f) \otimes 2T\text{sinc}(2fT)$$

che ha per forza banda infinita da quanto detto prima: il supporto dell'integrale di convoluzione tra due funzioni aventi estensione limitata è dato dalla somma delle estensioni delle due funzioni.

Nel mondo reale, tutti i segnali che considereremo saranno a durata finita. Abbiamo quindi bisogno di una definizione che ci permetta di prendere l'estensione degli spettri dei segnali reali, senza considerarli sempre come infiniti.

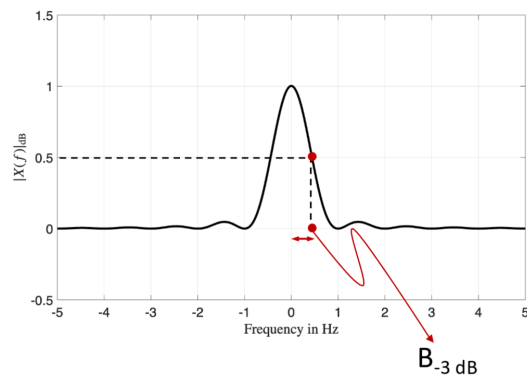
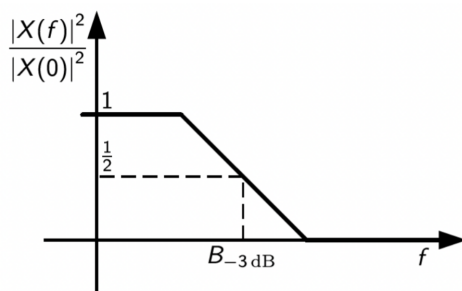
10.4.1 Banda a -3 dB

Definiamo quindi la **banda a -3 dB** come il punto del grafico della potenza in funzione della frequenza f che tocca i -3 dB rispetto agli 0 dB. Scegliamo esattamente -3 dB in quanto ricordiamo che, riguardo alle potenze:

$$\frac{|X(B_{-3\text{ dB}})|^2}{|X(f_0)|^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 10 \log_{10} \left(\frac{|X(B_{-3\text{ dB}})|^2}{|X(f_0)|^2} \right) \approx -3 \text{ dB}$$

cioè i -3 dB equivalgono a raggiungere metà della potenza massima. Notiamo che si è preso $|X(f_0)|^2$ come punto agli 0 dB, dove f_0 sarà la frequenza alla quale vorremo campionare la potenza massima. Solitamente si ha $f_0 = 0$.



Da un punto di vista meno teorico, la banda a -3 dB rappresenta un'indicazione "pratica" della banda di un segnale: frequenze inferiori alla banda sono ritenute "importanti", mentre quelle superiori sono ritenute "trascurabili". Esistono anche altri tipi di banda, come ad esempio la banda a -1 dB, la banda al 99% dell'energia, ecc...

- A scopo di esempio, calcoliamo la banda a -3 dB del segnale esponenziale mono-latero. Ricordiamo che questo si presentava come:

$$e^{-\frac{t}{T}}u(t) \rightarrow \frac{T}{1 + i2\pi fT}$$

con la sua trasformata.

Calcoliamo quindi il rapporto fra la banda e il suo valore in $f_0 = 0$, e quindi imponiamolo uguale a $\frac{1}{2}$ (equivalente a -3 dB):

$$\frac{|X(B_{-3\text{ dB}})|^2}{|X(f_0)|^2} = \frac{T^2}{1+4\pi^2 f^2 T^2} = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2} = \frac{1}{2}$$

da cui si ricava immediatamente:

$$f_{3\text{ dB}} = \pm \frac{1}{2\pi T}$$

- La banda a -3 dB può essere generalizzata a qualsiasi valore di decibel negativo, per cui si potranno calcolare bande a -5 , -10 , ecc... dB.

Ad esempio, anche a calcolare la banda a -10 dB di un segnale rettangolare. Ricordiamo che questo si presentava come:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow T \text{sinc}(fT)$$

con la sua trasformata.

Calcoliamo anche qui il rapporto fra la banda e il suo valore in $f_0 = 0$, e quindi imponiamolo uguale a $\frac{1}{2}$ (equivalente a -3 dB):

$$\frac{|X(B_{-3\text{ dB}})|^2}{|X(f_0)|^2} = \frac{\frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2 f^2}}{T^2} = \frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2 f^2 T^2} = 0.1$$

questo si riduce all'equazione trascendente data dalla sinc:

$$\sin(\alpha) - \sqrt{0.1}\alpha = 0$$

che possiamo risolvere in maniera numerica per trovare le soluzioni ± 2.31858 . Si ha quindi che la banda risulta facile da calcolare visto che:

$$\alpha = \pi fT \implies f_{3\text{ dB}} = \pm \frac{2.31858}{\pi T}$$

10.4.2 Banda a -3 dB per segnali modulati

Per un segnale modulato abbiamo che l'intera banda, come dal teorema di modulazione, viene spostata della frequenza modulante f_0 . Ciò che accadrà per la nostra definizione di banda a -3 dB sarà che in :

$$\frac{|X(B_{-3\text{ dB}})|^2}{|X(f_0)|^2} = \frac{1}{2}$$

prenderemo f_0 alla frequenza modulante.

Un'altra caratteristica è che per i segnali modulati, quindi, possiamo identificare due limiti di banda a -3 dB: quello sopra f_0 e quello sotto. Come conseguenza si ha un'ampiezza di banda a -3 dB come differenza tra i due limiti.

Per fare un esempio, riprendiamo la stessa banda a -3 dB della funzione trovata prima, cioè l'esponenziale *monolatera*:

$$x(t) = e^{\frac{-t}{T}} \cdot u(t) \rightarrow f_{3\text{ dB}} = \pm \frac{1}{2\pi T}$$

Moduliamo quindi tale funzione per un fattore $\cos 2\pi f_0 t$ e vediamo di dimostrare quella che sarebbe l'intuizione, cioè di avere due nuove bande a -3 dB:

- Una centrata su f_0 , cioè data dai valori:

$$B'^{-3\text{ dB}} = f_0 \pm \frac{1}{2\pi T}$$

- E una centrata su $-f_0$, cioè data dai valori:

$$B''^{-3\text{ dB}} = -f_0 \pm \frac{1}{2\pi T}$$

Iniziamo ponendo la funzione modulata:

$$x(t) = e^{\frac{-t}{T}} \cdot u(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

da cui la trasformata è immediata per il teorema di modulazione (teorema 7.6):

$$X(f) = \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0) = \frac{T}{2 + 4i(f - f_0)T} + \frac{T}{2 + 4i(f + f_0)T}$$

Procediamo quindi con gli stessi calcoli di prima per calcolare la banda a -3 dB. Abbiamo il numeratore:

$$|X(f)|^2 = \frac{T^2}{4 + 16(f - f_0)^2 T^2} + \frac{T^2}{4 + 16(f + f_0)^2 T^2}$$

Per il denominatore notiamo che possiamo scegliere sia $+f_0$ che $-f_0$ per trovare le 2 bande sopra e sotto lo zero. Facciamo l'esempio con $+f_0$:

$$|X(f_0)|^2 = \frac{T^2}{4 + 16(0)^2 T^2} + \frac{T^2}{4 + 16(2f_0)^2 T^2} \approx \frac{T^2}{4}$$

operiamo una semplificazione concessa dalle considerazioni fatte sul teorema 7.6: si ha che in genere $f_0 \gg f$, cioè la frequenza modulante è molto grande per permettere una corretta separazione nello spettro di frequenze disponibili. Per lo stesso motivo, prendendo il quadrato $(2f_0)^2$ al numeratore del secondo termine, si ottiene qualcosa di grande che porta quel termine ~ 0 . Lo trascuriamo. Abbiamo quindi ottenuto l'espressione della banda:

$$\frac{|X(f)|^2}{|X(f_0)|^2} = \frac{1}{1 + 4(f - f_0)^2 T^2} \implies B'^{-3\text{ dB}} = f_0 \pm \frac{1}{2\pi T}$$

per gli stessi calcoli della sezione precedente. A questo punto, ponendo $-f_0$ al denominatore, si otterrà la seconda espressione della banda che avevamo dato ($B''^{-3\text{ dB}} = -f_0 \pm \frac{1}{2\pi T}$) con procedimenti simili. La nostra intuizione è (almeno in maniera approssimata) giustificata.

10.4.3 Banda al 99% dell'energia

Vediamo un'altra definizione di banda, che avevamo anticipato, e che deriva da un *criterio energetico*. Questa sarà la **banda al 99% dell'energia**:

$$\int_{-B_{99}}^{B_{99}} |X(f)|^2 df = 0.99E_x = 0.99 \int |X(f)|^2 df$$

Dal teorema di Parseval (teorema 6.1) avevamo che l'energia sul dominio temporale è uguale a quella sul dominio frequenziale. Quindi, possiamo dare una definizione di banda anche prendendo gli estremi che racchiudono il 99% dell'energia di un segnale. Saranno questi gli estremi della banda al 99% come volevamo definire.

Impostiamo un ultimo esempio riguardante la banda al 99% dell'energia. Prendiamo il segnale $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$, con trasformata:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow T \text{sinc} T f$$

da cui la potenza:

$$T^2 \text{sinc}^2 T f$$

Cerchiamo allora di calcolarne la banda B_{99} tale che l'energia rispetti:

$$\int_{-B_{99}}^{B_{99}} T^2 \text{sinc}^2 (T f) df = 0.99E_X$$

Per calcolare l'energia totale $0.99E_X$, può essere utile sfruttare il teorema di Parseval (6.1) e farlo nel dominio tempo:

$$E_X = 0.99 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \right|^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = T$$

L'espressione che si va ad impostare è quindi:

$$\int_{-B_{99}}^{B_{99}} T^2 \text{sinc}^2 (T f) df = T^2 \left(2B_{99} - \frac{1}{\pi} (\text{Si}(2\pi B_{99}) - \text{sinc}(2\pi B_{99})) \right) = 0.99T$$

dove compare l'integrale della funzione sinc:

$$\int_{-b}^b \text{sinc}(x) dx = 2b - \frac{1}{\pi} (\text{Si}(2\pi b) - \text{sinc}(2\pi b))$$

che contiene la funzione *seno integrale*:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Anche qui notiamo che è difficile dare una soluzione che non sia numerica. In generale, questo dovrebbe mostrarci che la banda al 99 % è più spesso una misura empirica per la banda dei segnali, e comunque viene usata più di rado rispetto ad altre definizioni di banda (come la banda a -3 dB).

11 Lezione del 27-03-26

11.1 Trasformate continue di Fourier generalizzate

Iniziamo a vedere le TCF generalizzate, cioè le *Trasformate Continue di Fourier* generalizzate. Una generalizzazione è necessaria in quanto è necessario che i segnali che trasformiamo abbiano energia finita.

Ad esempio, non possiamo calcolare la trasformata di Fourier del gradino di *Heaviside* $u(t)$, in quanto per come è definito:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

ha energia infinita. La TCF generalizzata vale invece per tutti i segnali ad energia infinita, ad esempio i segnali periodici.

Delta di Dirac

Definiamo innanzitutto la funzione **delta di Dirac**, $\delta(t)$, come:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t), \quad u(t) = \int \delta(t) dt$$

già incontrata in fondamenti di automatica.

Sempre da fondamenti di automatica, ricordiamo che le proprietà importanti della delta di Dirac sono:

1. **L'integrale:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

che diamo per scontato, in quanto non sarebbe in verità possibile trovare una funzione analitica che rispetta tale proprietà (da qui si parla di *distribuzione*, non funzione).

2. **La proprietà di campionamento:**

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$$

che si dimostra impostando l'integrale (che assomiglia a una convoluzione ma non vi ricade completamente):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_{\epsilon}(t - t_0) dt$$

Notiamo subito che l'integrale ha valore $\neq 0$ solo nell'intervallo $[t_0, t_0 + \epsilon]$, e quindi:

$$= \int_{t_0}^{t_0 + \epsilon} \frac{f(t)}{\epsilon} dt = \frac{F(t)}{\epsilon} \Big|_{t_0}^{t_0 + \epsilon} = \frac{F(t_0 + \epsilon) - F(t_0)}{\epsilon}$$

per una qualche primitiva F . Passando al limite $\epsilon \rightarrow 0$, si ha:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + \epsilon) - F(t_0)}{\epsilon} = f(t_0)$$

Questo significa che vale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t - t_0) = f(t_0)$$

e visto che la delta di Dirac è definita $\neq 0$ effettivamente in un unico punto in \mathbb{R} , dovrà valere la tesi. \square

3. Il fatto che la delta di Dirac è **pari**, chiaramente da come è definita;
4. Il fatto che la delta di Dirac rappresenta l'*elemento neutro* del **prodotto di convoluzione**:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

presa infatti $g(t) = \delta(t - t_0)$ si ha:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta_{\epsilon}(\tau - t + t_0) d\tau = \int_{t-t_0}^{t-t_0+\epsilon} \frac{f(\tau)}{\epsilon} d\tau = \frac{F(t)}{\epsilon} \Big|_{t-t_0}^{t-t_0+\epsilon} = \frac{F(t-t_0+\epsilon) - F(t-t_0)}{\epsilon}$$

Passando al limite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(t-t_0+\epsilon) - F(t-t_0)}{\epsilon} = f(t-t_0)$$

cioè si ottiene la stessa funzione f scostata di un valore t_0 , lo stesso di cui è scostata δ , da cui la tesi. \square

Proviamo quindi a trasformare la trasformata di Fourier della delta di Dirac:

$$\delta(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i2\pi ft} dt = e^{-i2\pi ft} \Big|_{t=0} = 1$$

direttamente dalla proprietà di campionamento esibita dalla delta di Dirac.

Iniziamo quindi a calcolare alcune trasformate di Fourier generalizzate sfruttando le proprietà appena trovate riguardo alla trasformata della delta di Dirac.

1. Segnale costante

Prendiamo quindi un segnale ad energia infinita, come ad esempio la funzione costante:

$$x(t) = 2$$

A questo punto calcolare la trasformata sarà semplice, in quanto per un segnale DC potremo usare la appena trovata trasformata della delta, assieme al teorema di dualità, per dire:

$$\rightarrow 2 \cdot \delta(t)$$

Questo è banale, ma ci dimostra che è effettivamente possibile calcolare trasformate di segnali ad energia infinita. Vedremo adesso come trasformare segnali ad energia infinita più complessi (ma anche più utili);

2. Segnale con ritardo

Nel caso della semplice delta di Dirac con scostamento temporale, si ottiene direttamente dal teorema del ritardo:

$$\delta(t - t_0) \rightarrow e^{-i2\pi ft_0}$$

da cui segue direttamente (per il teorema della dualità, 7.4):

$$e^{i2\pi f_0 t} \rightarrow \delta(f - f_0)$$

Questo risultato è estremamente utile in quanto ci mostra come trasformare la forma tipica dalle formule di Eulero:

$$e^{i2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + i \sin(2\pi f_0 t)$$

3. Segnali periodici

Vediamo quindi come l'ultima proprietà trovata può tornarci utile per calcolare la trasformata di funzioni periodiche. Abbiamo detto che questo non era possibile in quanto è necessario che i segnali che trasformiamo (con la trasformata non generalizzata) abbiano energia finita.

Sfruttando le formule di Eulero, ed applicando la trasformata delta di Dirac, abbiamo invece:

$$x_c(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}}{2} \rightarrow \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} = X_c(f)$$

$$x_s(t) = \sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{i2\pi f_0 t} - e^{-i2\pi f_0 t}}{2j} \rightarrow \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j} = X_s(f)$$

Questo è esattamente in accordo con quanto avevamo visto, seppur anticipandolo in maniera approssimata, introducendo la trasformata di Fourier in 6.1.1 (notiamo che al tempo avevamo usato la DCT, che di per sé mostra questo comportamento della delta di Dirac in maniera "discretizzata").

Fissiamo i concetti notando come è possibile dimostrare il teorema della modulazione 7.6 sfruttando il teorema della moltiplicazione e l'appena trovata trasformata del segnale coseno. Avevamo detto che una modulazione non era altro che il prodotto per una cosinusoidale:

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) = x(t) \cos 2\pi f_0 t$$

Questo ci porta ad applicare direttamente la convoluzione nel dominio frequenziale:

$$Z(f) = X(f) \otimes \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

dalla trasformata del coseno appena calcolata. Ora, visto che la delta di Dirac rappresenta il componente neutro della convoluzione (per la proprietà di campionamento), sarà immediato dire:

$$Z(f) = \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$

che è esattamente la tesi del teorema di modulazione, che risulta quindi dimostrato. □

4. Segnale gradino

Come ultimo esempio, vediamo come calcolare la trasformata di Fourier generalizzata del classico gradino di Heaviside:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

In questo caso preferiamo usare la notazione alternativa:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$$

Questa ci permette di usare la trasformata (che assumiamo nota, la dimostrazione è nota dal fatto che la funzione segno deriva alla delta di Dirac e dalle proprietà delle trasformate delle derivate, non viste in questi appunti):

$$\frac{1}{t} \rightarrow -j\pi\text{sgn}(x)$$

Per cui il calcolo risulta:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t) = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{j2\pi f}$$

12 Lezione del 31-03-26

Avevamo visto nella lezione le variabili aleatorie continue, cioè quelle che assumevano un numero infinito non numerabile di valori. Quindi, avevamo visto come la definizione di *densità* di probabilità veniva definita come derivata:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

12.0.1 Esempi di variabili aleatorie continue

Vediamo quindi alcuni esempi di variabili aleatorie continue:

- **Variabili aleatorie uniformi**

Una variabile aleatoria è detta *uniforme* nell'intervallo $[a, b]$, se la sua densità di probabilità è costante in tale intervallo:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Come abbiamo detto, X è uniforme e si dice:

$$X \in \text{Uniforme}(a, b)$$

- **Variabili aleatorie esponenziali**

Vediamo un altro esempio che tornerà spesso di probabilità di densità, cioè la variabile aleatoria *esponenziale*. Noteremo che questa ha la proprietà di *assenza di memoria*. Ha un unico parametro λ , ed è definita come:

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}u(x), \quad F_X(x) = (1 - e^{-\frac{x}{\lambda}})u(x)$$

dove u è il gradino di Heaviside.

La distribuzione di probabilità si calcola come sempre svolgendo l'integrale:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{\alpha}{\lambda}}u(\alpha) d\alpha = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{\lambda}} d\alpha, & x \geq 0 \end{cases} = (1 - e^{-\frac{x}{\lambda}})u(x)$$

dove si reintroduce il gradino u alla fine della derivazione. Come abbiamo detto, X è esponenziale e si dice:

$$X \in \text{Esponenziale}(\lambda)$$

• **Variabili aleatorie gaussiane**

Veniamo quindi al tipo più celebre di variabile aleatoria, cioè quella *gaussiana* o *normale*. Questa è indicata da due parametri caratteristici:

- Il *valor medio* η . Corrisponde al *massimo* della densità di probabilità $f_X(x)$;
- La *varianza* σ^2 , cioè un indice di variazione dal valor medio della variabile aleatoria. Corrisponde al *flesso* $\eta \pm \sigma$ della densità di probabilità $f_X(x)$.

Viene quindi definita come:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$

Se una X è normale o gaussiana scriviamo:

$$X \in \mathcal{N}(\eta, \sigma^2)$$

Notiamo che per una variabile aleatoria gaussiana non è possibile calcolare in forma chiusa la distribuzione di probabilità $F_X(x)$. Per questo l'unico modo che avremo per ricavarla sarà per via numerica o attraverso tabelle.

Talvolta definiamo la variabile aleatoria gaussiana (o normale) *standard* come:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

presi valor medio e varianza come:

$$\begin{cases} \eta = 0 \\ \sigma = 1 \end{cases}$$

Chiamiamo quindi la funzione di densità Φ , indicata come:

$$\Phi(z) = F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$$

Prendiamo quindi la speculare Q come la *funzione degli errori*:

$$Q = 1 - \Phi(z)$$

Se $X \in \mathcal{N}(\eta, \sigma^2)$, la funzione di distribuzione si ricava da quella della normale standard mediante la seguente relazione:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\alpha-\eta)^2}{2\sigma^2}} d\alpha$$

quindi ponendo il cambio di variabile in y :

$$y = \frac{\alpha - \eta}{\sigma}, \quad dy = \frac{d\alpha}{\sigma}$$

per cui ritroviamo la stessa forma della funzione Φ :

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right)$$

Quindi si ha che:

$$P(X > \lambda) = 1 - F_X(\lambda) = Q\left(\frac{\lambda-\eta}{\sigma}\right)$$

cioè la probabilità che la variabile aleatoria gaussiana X si trovi sopra λ è uguale alla funzione degli errori Q valutata nel punto y con $\alpha = \lambda$. Ricordiamo ancora che Q si ricava da tabelle o in maniera numerica.

In generale, data una variabile aleatoria gaussiana $X \in \mathcal{N}(\eta, \sigma^2)$, la probabilità associata ad un qualunque evento di interesse può essere calcolata mediante la funzione Φ , o equivalentemente mediante la funzione Q :

$$P(a < x \leq b) = \int_a^b f_X(\alpha) d\alpha = F_X(b) - F_X(a) = \Phi\left(\frac{b-\eta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\eta}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{a-\eta}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{b-\eta}{\sigma}\right)$$

in quanto per simmetria vale che:

$$Q(z) = 1 - Q(-z), \quad \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

12.0.2 Densità di probabilità di variabili aleatorie discrete

Per le variabili aleatorie discrete avevamo definito in 8.3 una funzione *massa* $p_X(x)$ di probabilità. Risulta possibile anche scrivere una funzione *densità di probabilità* sfruttando la delta di Dirac (introdotta per trattare le trasformate di Fourier generalizzate):

$$F_X(x) = \sum_i p_X(x_i) u(x - x_i) \implies f_X(x) = \sum_i p_X(x_i) \delta(x - x_i)$$

Questo risulta immediato dalla definizione di densità di probabilità come:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

e dal fatto che la distribuzione di probabilità per una variabile aleatoria discreta era definita in funzione del gradino u :

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) = \sum_i p_X(x_i) u(x - x_i)$$

Quindi, noto il fatto che la derivata del gradino è la delta di Dirac:

$$\frac{d}{dx} u(x) = \delta(x)$$

il risultato ottenuto è immediato.

Questo ha un risultato anche per le probabilità di intervalli:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx = \sum_i p_X(x_i) \int_a^b \delta(x - x_i) dx$$

Se a e b non coincidono con nessuno degli x_i , si ottiene semplicemente la somma delle probabilità associate ai valori assunti dalla variabile aleatoria all'interno dell'intervallo a, b . Si deve fare attenzione, ricordiamo, al caso in cui uno degli estremi (facciamo b) coincide con un valore della variabile aleatoria. In tal caso i due integrali:

$$\int_a^{b^+} f_X(x) dx \neq \int_a^{b^-} f_X(x) dx$$

Nel primo caso prendiamo la densità di probabilità in b , nel secondo no.

12.1 Funzioni di distribuzione di variabili aleatorie miste

Diamo la definizione di variabile aleatoria **mista**:

12.1: Variabile aleatoria mista

Una variabile aleatoria si dice mista se la relativa funzione di distribuzione $F_X(x)$ è discontinua, ma non costante a tratti.

In tal caso, in un intervallo continuo, può assumere valori discreti con probabilità non nulla. In particolare, un salto in x_i rappresenta la probabilità dell'evento $X = x_i$.

12.2 Trasformazioni di variabile aleatoria

Definiamo il concetto di **trasformazione** di una variabile aleatoria:

12.2: Trasformazione di variabile aleatoria

Una trasformazione di variabile aleatoria è una funzione g che porta una variabile aleatoria X in una seconda variabile aleatoria Y :

$$Y = g(X)$$

In questo una trasformazione di variabile aleatoria è una funzione reale di variabile reale, non necessariamente iniettiva. La variabile reale nel dominio comprende tutti possibili valori di X , e quindi il codominio corrisponde a tutti i possibili valori di Y dove quegli X mappano.

12.2.1 Metodo della funzione distribuzione

Per calcolare la probabilità (e quindi la distribuzione di probabilità) di una variabile aleatoria trasformata dobbiamo riportare l'intervallo di probabilità in Y ad un intervallo $I(y)$ nella X originale.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in I(y)), \quad \text{dove } I(y) = \{x : g(x) \leq y\}$$

Da questo possiamo calcolare la distribuzione di Y a partire dalla densità di X come:

$$f_Y(y) = \int_{I(y)} f_X(x) dx$$

Una volta ricavata la funzione di distribuzione è possibile ricavare la densità di probabilità in Y , come sempre, derivando:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

Questo metodo, chiamato *metodo della funzione distribuzione*, è generale, cioè si applica a variabili aleatorie continue, discrete e miste. Esistono però alcuni casi dove è possibile ricavare la densità di probabilità della variabile aleatoria trasformata in maniera più semplice.

Se Y è una variabile aleatoria discreta che assume i valori y_1, y_2, \dots finiti o infiniti numerabili, è spesso conveniente determinare direttamente la massa di probabilità $P(Y = y_k)$. Se anche la X è discreta, l'evento $\{g(X) = y_k\}$ non sarà altro che l'unione di tutti gli eventi $\{X = x_i\}$ tali che $g(x_i) = y_k$.